

GÉOMÉTRIE

DU

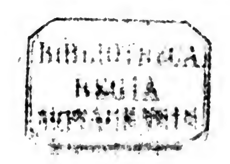
COMPAS.

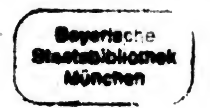
GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

Par L. MASCHERONI;

OUVRAGE TRADUIT DE L'ITALIEN

Par A. M. CARETTE, Officier du Génie.





A PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VI. (1798.)

A BONAPARTE L'ITALIQUE.

J'ai vu ta main, ta main puissante,
Qui frappa tant de Potentats
Et fonda tant d'heureux Etats,
Aux loix d'Euclide obéissante,
Avec moi suivre le Compas.
Vainqueur de leur hauteur extrême,
Tu franchis les monts sourcilleux :
Ton génie aborde de même
Le plus difficile problême,
Et fait douter si nos neveux,
De ce génie à qui tout cède,
Admirant les efforts heureux,
En toi reconnoîtront le mieux
Annibal ou bien Archimède.
De tes triomphes éclatans
Je vois la mémorable année,
Comme un soleil, de gloire environnée,
Briller sur l'abyme des tems,
Et vaincre l'envie étonnée.
Poursuis, Bonaparte, poursuis ;
De tes hauts faits soutiens la gloire.
Savant, de tous les arts épris,
Amant chéri de la victoire,
Héros, et plus sans doute encor,
Homme généreux et sensible,
Donne à ton ame un libre essor.
A ton bras toujours invincible,
A ton cœur toujours bienfaisant,
L'Italie enfin affranchie,
Va devoir sa nouvelle vie
Et son empire renaissant.

D'Arnaud.

A BONAPARTE L'ITALICO.

Io pur ti vidi coll' invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,
Meco divider con ricurvi giri
Il curvo giro del fedel compasso.
E ti vidi assaltar le chiuse rocche
D'ardui problemi col valor d'antico
Geometra Maestro, e mi sovvenne
Quando l'Alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L'anno di tue vittorie, anno che splende
Nell' abisso de' secoli qual sole.
Segui l'impresa, e coll' invitta mano
Guida all' Italia tua liberi giorni.

ERRATA.

Page 8, *ligne* 4, *au lieu de* Bp, *lisez* Pp.
Page 16, *ligne* 20, *au lieu de* points, *lisez* parties.
Ibid. *ligne pénult.* placez au commencement le n.° 30.
Page 34, *ligne* 3, *au lieu de* nous retirerons, *lisez* nous tirerons.
Page 55, *pour les* n.os 73 et 74, *voyez la fig.* 25.
Page 57, *pour le* n.° 76, *voyez la fig.* 26.
Page 58, *pour le* n.° 77, *voyez la fig.* 27.
Page 59, *pour le* n.° 80, *voyez la fig.* 29.
Page 169, *pour le* n.° 171, *voyez la fig.* 86.
Page 172, *ligne* 18, $\sqrt{3}$, *lisez* $\sqrt{\sqrt{3}}$.
Page 207, *ligne* 19, *au lieu de* nous sous-entendrons, *lisez* nous supposerons.

PRÉFACE

DE L'AUTEUR.

La première idée qui m'engagea à tenter la carrière nouvelle de la Géométrie du Compas fut celle-ci : Puisque l'on fait chaque jour de si belles découvertes en avançant dans les Mathématiques, ne pourroit-on pas, en revenant sur ses pas, trouver quelqu'endroit encore inconnu dans le vaste champ qu'elles offrent à parcourir? Jusqu'ici on a regardé en Géométrie comme les solutions les plus simples celles qui n'exigeoient que le secours de la règle et du compas : c'est-à-dire, de la ligne droite la plus simple des lignes et du cercle la plus simple des courbes. A ces deux instrumens des problêmes, si on peut s'exprimer ainsi, qui pendant un tems constituoient, et déterminoient la Géométrie élémentaire, on ajouta dans la suite les courbes coniques ; celles-ci furent suivies des courbes supé-

rieures au second degré, et des transcendantes de diverses espèces.

Le domaine de la Géométrie continua à s'accroître, à l'aide de ces profondes recherches et avec le nouveau secours de l'analyse finie et infinitésimale, au point, que les inventions qui d'abord avoient fixé l'admiration des Anciens, et mérité les sacrifices de Thalès et de Pythagore, sont devenus l'apanage des enfans de nos jours. Je me dis à moi-même : ne pourrois-tu pas revenir aux élémens, en rentrant dans la ligne de démarcation, et chercher s'il n'est jusqu'ici rien resté en arrière qui ait été négligé? Est-il bien vrai que les problêmes élémentaires d'Euclide soient de la plus simple construction possible? Ne pourroit-on pas décomposer l'élément mathématique en ses élémens fondamentaux, la règle et le compas, à l'exemple de ceux qui ont décomposé l'eau en deux airs, et un air regardé jusqu'à présent comme simple, en deux autres substances?

Alors

Alors je m'avisai que, la règle seule ne pouvant servir qu'à conduire une ligne droite, l'on pouvait peut-être n'employer que le compas, non pour décrire seulement un cercle ou un arc, mais en en décrivant plusieurs de différens centres et avec diverses ouvertures, trouver par le moyen des sections mutuelles de ces cercles plusieurs points utiles et précisément les points cherchés de position dans un problême quelconque. J'ai remarqué jusqu'ici que cette branche n'avoit encore été cultivée par aucun Mathématicien, et que les solutions de ce genre, obtenues par hasard à l'aide du compas seul, auroient été par leur construction plus élémentaires que toute autre.

Deux raisons cependant me firent hésiter pendant quelque tems à entreprendre cet ouvrage, dans la crainte qu'en me servant de ce moyen, mes efforts ne devinssent inutiles; d'abord, je ne voyois pas trop ce qui résulteroit de trouver avec le seul compas des points que d'au-

tres ont trouvé avec le compas et la règle réunis. Je craignois en second lieu, et cela étoit bien naturel, que mes essais ne fussent pas couronnés du succès que j'en espérois; mon travail alors eût été perdu. Les constructions faites avec le seul compas pour déterminer les points de la Géométrie élémentaire, pouvoient être encore plus compliquées que celles déjà connues où l'on employoit de plus la règle. Ma théorie auroit ainsi manqué d'élégance, et la pratique de précision; ainsi j'étois sur le point d'abandonner mon entreprise.

Dans mon incertitude, il m'arriva par hasard de relire la manière avec laquelle Graham et Bird en Angleterre divisèrent leurs grands quarts de cercle astronomique (*Encyclopédie méthodique*. Article *quart de cercle mural.*) Celui qu'a fait Graham pour l'observatoire de Greenich, non-seulement a servi de modèle à la plus grande partie de ceux qu'on a faits depuis, mais encore a mérité par sa précision d'être regardé par les Astronomes comme

un des meilleurs jusqu'à ceux de Ramsden. Je m'apperçus donc que la division de cette célèbre machine avoit été faite à l'aide du compas seul sans la règle ; rien de plus intéressant que la description des moyens employés par cet Artiste, dans cette longue et ingénieuse opération. Je n'entrerai point ici dans l'explication des motifs qui firent exclure la règle ; ils seront facilement sentis par ceux qui se connoissent en travaux de ce genre. Pour démontrer en général la supériorité de l'usage du compas sur celui de la règle, quand il s'agit de décrire avec précision des lignes à l'épreuve du microscope, il suffit de dire qu'avec une règle tant soit peu longue, il est presque impossible de garantir la précision de tous les points qu'on trace, tant il est difficile qu'elle soit rigoureusement droite dans toute sa longueur. Fût-elle même très-droite, les praticiens savent que la trace d'une ligne menée le long de la règle porte avec elle une incertitude de

parallélisme dans le mouvement de l'axe de la pointe qui marque, ou de parfaite application de cette pointe à l'arête de la règle. Le compas n'est point sujet à ces deux inconvéniens, il suffit que son ouverture soit fixe et les pointes très-fines; en plaçant l'une d'elles en un point pris pour centre, l'autre décrit un arc aussi exact qu'il est possible. En lisant la description de la méthode de Graham, je remarquai qu'il rencontra quatre difficultés :

La première, fut d'être obligé d'opérer par tatonnemens. En parlant en effet de l'arc de soixante degrés qu'il détermina par le moyen du rayon, on voit que toutes les subdivisions furent faites par essais. Les Anciens ne nous ont laissé le moyen de diviser la circonférence avec le seul compas qu'en six parties, comme il est enseigné et démontré dans la quinzième proposition du liv. 4 des élémens d'Euclide; Graham ne put donc obtenir une précision géométrique que pour un point.

Le second inconvénient fut, la perte de tems que les plus habiles mêmes ne sauroient éviter dans les expériences.

Le troisième fut, d'avoir été obligé d'employer deux plans, un pour les essais, et l'autre qui étoit le quart de cercle lui-même, sur lequel il transposoit les résultats ; ce qu'il faisoit pour ne pas gâter, par les essais sur le quart de cercle, la surface du limbe.

Enfin la quatrième difficulté fut, d'avoir été obligé d'exécuter deux divisions différentes ; comme la division du quart de cercle en 90° entraînoit avec elle les subdivisions d'un arc en 3 et en 5 parties, et que les essais de ces subdivisions étoient imparfaits par le trop grand nombre d'erreurs inévitables, il voulut tenter une autre division du même quart de cercle, approchant de la première, qui ne divisoit l'arc que de deux en deux parties. Ayant donc divisé l'arc de 60° en deux parties, il eut l'arc de 30° ; le quart de cercle se trouvant par-là divisé

en 3 parties, avec les subdivisions par 2, on eut ensuite la 6.me, la 12.me partie, jusqu'à ce qu'enfin le quart restât divisé en 96. Cette division étoit celle qui méritoit le plus de confiance; mais l'autre division en 90 degrés, devant servir immédiatement aux Astronomes, fut comparée à la première, et corrigée par le moyen d'une table calculée à cet effet.

Tous ces inconvéniens engagèrent sans doute Bird à recourir à une autre méthode pour diviser ses quarts de cercle. Elle consistoit à déterminer les arcs par leurs cordes qu'il prenoit sur une échelle divisée en parties égales. Elle n'étoit pas cependant exempte d'imperfections, puisqu'elle manquoit d'abord de précision géométrique, et qu'en second lieu, le quart de cercle avoit nécessairement les inexactitudes qui se trouvoient sur l'échelle.

L'importance des instrumens astronomiques m'engagea à considérer mon projet de la Géométrie du compas, sous un point de vue plus favorable. Je commen-

çai à croire que j'aurois beaucoup fait, si je réussissois à diviser la circonférence en plus de six parties par le secours du compas seul; j'aurois rendu aux artististes qui travaillent aux instrumens astronomiques, un service d'autant plus important, que mes subdivisions de la circonférence auroient été plus étendues et plus conformes à la division du quart de cercle en 90°. Je fournissois à cette classe de mécaniciens un moyen de précision géométrique dans leurs divisions. Je leur épargnois le tems des tâtonnemens, la nécessité de faire deux divisions à-la-fois et sur deux plans différens, et sur-tout je rendois inutile l'usage de l'échelle dont on ne peut garantir l'exactitude, bien loin qu'elle soit d'une rigueur géométrique. Il ne me restoit que la seule crainte, que ma nouvelle méthode ne fût compliquée et trop longue pour être commode dans la pratique.

Je me mis néanmoins à l'ouvrage. Voyant que je ne devois pas attendre

beaucoup de l'application de l'algèbre à la géométrie, j'eus recours à d'autres moyens purement géométriques. Je ne les indique pas ici, parce que dans cette nouvelle carrière je n'ai pas tenu toujours la même route, et que je dois beaucoup au hasard. Ce n'a été souvent qu'après mainte tentative différente, que j'ai obtenu le résultat que je cherchois.

Je laisse à d'autres le soin d'examiner la chaîne qui lie entr'eux les problêmes de cette nouvelle théorie; ils parviendront peut-être à suivre le fil qui conduit par ordre de l'un à l'autre, et qui, s'il eût été découvert dès le commencement, auroit rendu plus courte et plus facile l'invention de la Géométrie du compas.

J'adressai, il y a deux ans, le premier essai de mon entreprise au citoyen Annibal Beccaria, avec une lettre que je fis insérer dans le journal de Brugnatelli. Cet excellent artiste, alors Patrice Milanais, depuis membre de la municipalité et du comité d'instruction publique

de cette ville, réunit à la gloire d'être le frère du célèbre auteur du livre *des Délits et des Peines,* celle qui lui est propre d'exécuter avec la plus grande habileté tous les instrumens de mathématiques les plus délicats.

Mon premier essai consistoit dans la méthode de diviser la circonférence en vingt-quatre parties, à l'aide d'un seul point pris hors d'elle. L'exécution de cette division est la plus simple qu'on puisse espérer, et je l'ai conservée dans cet ouvrage. Celle que j'avois donnée en 120 parties étoit trop compliquée; j'en ai trouvai une beaucoup moins longue, et telle même que je la crois la plus courte possible. J'y avois ajouté aussi une construction très-prompte pour obtenir les racines quarrées des nombres, depuis l'unité jusqu'à 10; je l'ai encore conservée dans cet ouvrage.

J'ai omis les autres problêmes exposés dans cette lettre, parce qu'ils étoient trop compliqués, ou d'une approximation insuffisante. Je suis parvenu depuis,

comme on le verra, à diviser très-promptement la circonférence en 240 parties, avec une exactitude géométrique, par le moyen du compas seul et de trois points pris hors de la même circonférence. Chacune de ces parties est un degré et demi de la division en 360°, usitée jusqu'ici. Je partage tout arc quelconque en deux parties, et cela géométriquement par approximation. Je divise la circonférence avec trois points seulement, en degrés et quarts de degrés sans erreur d'un sixième de seconde.

Avec ces mêmes points, je la divise en minutes avec erreur de moins d'une seconde. Je me suis flatté que les Astronomes pouvoient être contens de cette précision, parce que je ne sache pas d'artiste, même parmi les plus célèbres, qui ait passé outre.

Cependant je ne croyois pas encore avoir assez fait, si ma nouvelle théorie ne servoit pas aussi à la nouvelle division du cercle.

On sait que les Français, heureux de

posséder au sein de leur République les premiers Géomètres de l'univers, ont enfin, d'après leurs conseils, adopté pour tous les arts la seule division décimale tant souhaitée des savans.

Sans doute que cette division réussira avec difficulté dans les autres contrées, à cause des préjugés, et sur-tout de la force d'inertie; mais elle s'établira enfin d'une manière inébranlable par-tout où on aime les sciences, et où les intérêts du commerce sont bien entendus. Une des divisions les plus difficiles à changer, étoit celle de la circonférence du cercle en 360°, et la subdivision en 60 parties, employée par toutes les nations; et cela, à cause des fatigans travaux qu'il falloit nécessairement entreprendre pour refaire les tables trigonométriques dans un nouveau système; mais l'énergie d'une grande nation qui se régénère ne connoît point d'obstacles. Ayant déterminé 400 parties ou degrés dans la circonférence, le quart du cercle, qui est le fondement de la trigonométrie, se trouve divisé en 100 par-

ties, chacune desquelles se subdivise en 100 autres, et ainsi de suite.

Les tables des sinus naturels et artificiels de ces divisions et subdivisions sont déjà calculées et imprimées. Mais pour que rien ne manque à la stabilité et à la certitude de la précision des nombres, on a entrepris en France de les faire imprimer en caractères soudés en plomb. On voit déjà de ces nouvelles tables exécutées d'après la méthode nouvelle et ingénieuse de *Firmin Didot*, appelée stéréotipe.

Une société de calculateurs très-habiles en prépare encore d'autres plus étendues et avec un plus grand nombre de décimales, sous la direction du célèbre *Prony*. Toutes ces circonstances m'engagèrent à chercher une méthode au moins d'approximation, pour diviser la circonférence en ces nouveaux degrés et parties de degrés. J'ai réussi avec trois points seulement et très-peu d'ouvertures de compas, à obtenir cette nouvelle division décimale de la circonférence sans erreur d'une seconde.

Quand je n'eusse fait autre chose que ce que je viens d'indiquer, cela auroit suffi à la recommandation de l'usage du compas seul. Mais en avançant, j'ai trouvé qu'il n'y avoit point de problême de géométrie élémentaire, qui ne puisse se résoudre avec ce seul instrument, c'est-à-dire, en ce sens que le compas suffit pour trouver tous les points demandés par le problême, pour la position et la détermination des droites dont on a besoin. Ceci intéressoit la théorie; j'ai voulu épuiser le sujet, donner tous les élémens pour tous les cas possibles, et démontrer qu'on peut trouver avec le compas seul tous les points qu'Euclide et les autres auteurs de géométrie élémentaire, enseignent à trouver avec le secours de la règle et du compas réunis.

Quoique tous les problêmes élémentaires résolus avec le seul compas n'aient pas une solution assez simple, j'ose dire pourtant que la plus grande partie des plus nécessaires sont résolus avec assez de briéveté et de simplicité, pour enga-

ger les praticiens à rejeter le secours de la règle et à se servir du seul compas pour trouver les points fondamentaux. Les moyens que je propose dans ce livre justifieront ce que j'avance. Je n'indiquerai point ici tous les problêmes semblables qui m'ont paru de quelqu'importance : en voici cependant quelques-uns.

Si l'on cherche avec le seul compas le centre d'un cercle, on le trouvera promptement et sans peine ; on aura de même les troisièmes et les quatrièmes proportionnelles, et par conséquent les moyennes proportionnelles.

On pourra aussi, avec le seul compas, construire des polygones réguliers inscrits ou circonscrits au cercle (1). Le seul compas suffira encore pour trouver les racines quarrées des nombres, pour doubler, multiplier les surfaces des quarrés, des cercles et des autres figures semblables. On résoudra avec une exactitude géométrique tous ces problêmes ;

---

(1) Les ingénieurs militaires trouveront peut-être ici quelque chose d'utile pour leurs travaux.

car leur nature les en rend susceptibles. Ensuite, par approximation, on trouvera une longueur égale à la circonférence d'un cercle, ou un arc égal au rayon, ou un quarré égal à un cercle, ou un cercle égal à un quarré, ou une sphère égale à un cube, ou un cube égal à une sphère, ou un cube double ou triple ou quadruple d'un autre. On pourra résoudre tous ces problêmes, en employant des sections d'arcs, ou en déterminant, toujours sans autre instrument que le compas, la longueur des côtés ou des rayons dont on a besoin pour les figures demandées.

Voilà en peu de mots le fonds de la Géométrie du compas que je présente au public. Quant aux démonstrations, je me suis servi, autant que j'ai pu, de la géométrie des Anciens; cela m'a paru plus conforme à la nature de mes problêmes et plus court. Par-tout où les procédés géométriques devenoient trop longs pour obtenir le résultat, j'ai employé le calcul; j'ai donc en même-tems

recherché la briéveté, la clarté, l'élégance autant qu'il m'a été possible.

J'ai cité Euclide, ce grand maître en fait d'élémens. Lorsqu'il est question de proportions, les numéros des propositions que je cite sont ceux de *Tacquet*, parce que son livre est plus répandu en Italie que l'ancien texte d'Euclide.

J'ai placé dans le onzième livre en faveur des artistes qui ne voudront que s'amuser avec le compas, plusieurs problêmes récréatifs tirés de *Pappus*, d'*Ozanam*, de *Simpson* et de plusieurs autres auteurs. Voilà tout ce que j'avois à dire à mes lecteurs sur la Géométrie du compas. Elle est, quant à la construction de ses problêmes, la plus simple et la plus élémentaire qu'on puisse desirer, et je ne sache pas que cette matière ait été traitée jusqu'ici par personne.

GÉOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

1. J'APPELLE *Géométrie du compas*, celle qui, par le moyen du compas seulement, et sans le secours de la règle, détermine la position des points.

Etant donnés, par exemple, deux points *A* et *E* [*figure* 1.re], si l'on cherche le troisième point *D*, qui soit aussi éloigné de chacun d'eux qu'ils le sont entr'eux, qu'on décrive d'un intervalle égal au rayon *AE*, et des points *A* et *E* comme centres, les deux cercles *EDB*, *ADV*, qui se coupent au point *D*, ce point *D* sera le point cherché, puisqu'il sera éloigné des points *A* et *E* d'un intervalle égal à *AE*. (*Prop.* 1, *liv.* 1 *des Elémens d'Euclide.*) Ce point *D* a été trouvé avec le seul compas, sans le secours de la règle.

2. Il peut arriver que l'on trouve la position d'un point avec le seul compas, mais que pour démontrer la proposition, on ait besoin de la règle dans la construction de la figure.

Soient, par exemple, donnés deux points *A* et *B* [*fig.* 2] qui soient éloignés entr'eux d'un certain intervalle pris pour unité, ou qu'on fait $=1$, si on cherche un point *D* qui soit éloigné de *B* de l'intervalle $BD=\sqrt{3}$, on résoudra le problême de la manière suivante :

Du centre *A* et d'un rayon *AB*, soit décrit le cercle *BCD*; avec le même rayon et du centre *B*, soit décrit un arc qui coupe la circonférence au point *C*; puis du centre *C* et avec le même rayon, soit décrit un arc qui coupe plus loin la circonférence en *D*; on aura en *D* le point cherché, ainsi trouvé sans le secours de la règle.

Pour démontrer néanmonis que l'intervalle $BD=\sqrt{3}$, on aura besoin de lignes droites qui se tracent avec la règle. Soit *BE* le diamètre du cercle *BCD*, si on mène les droites *BD*, *DE*, le triangle *BDE* sera rectangle en *D* (31. *liv.* 3), et on aura : $(BE)^2=(BD)^2+(DE)^2$; d'où $(BD)^2=$

$(BE)^2 - (DE)^2$. Mais l'intervalle BC étant égal à $CD = AB$, on aura encore $DE = AB$ (15. *liv.* 4), ou $DE = 1$, et $BE = 2$. On aura donc : $(BD)^2 = 4 - 1 = 3$: d'où $BD = \sqrt{3}$; ce qu'il falloit démontrer, et ce qu'on ne pouvoit faire sans la règle. Cette proposition est la 12.e du livre 13 d'Euclide.

3. De la définition précédente (1), il résulte qu'à la géométrie du compas appartiennent tous les problêmes que l'on peut résoudre avec le seul compas, quoiqu'on ne puisse pas les démontrer avec ce seul instrument. Tel est le problême précédent (2).

4. Cette géométrie sera, comme on le verra dans les exemples, d'un-très-grand usage dans la pratique pour trouver des points avec la plus grande précision possible, et même beaucoup plus promptement avec le seul compas, qu'en y joignant le secours de la règle.

5. Nous résoudrons donc les problêmes avec le seul compas, et on pourra ensuite, pour les démonstrations, se servir de constructions faites suivant l'usage, avec la règle

et le compas. C'est pourquoi nous citerons les propositions et les livres d'Euclide.

6. Nous verrons aussi, au commencement de ce traité, que l'on n'a omis aucun des élémens nécessaires pour que l'on puisse, avec le seul compas, déterminer tous les points, de quelque problême que ce soit, qui jusqu'ici n'ont pu être déterminés qu'avec la règle et le compas réunis.

7. Nous ne placerons pourtant pas ici tous ces problêmes : mais après avoir démontré les élémens nécessaires et suffisans pour tous, nous en résoudrons un grand nombre des principaux, et sur-tout ceux qui sembleront les plus utiles ou préférables à cause de leur élégance.

8. Nous ajouterons ici en faveur des artistes pour lesquels, en grande partie, cet ouvrage est écrit, que bien convaincus de l'importance des erreurs qui résultent de l'écart et du rapprochement des branches du compas pour obtenir avec précision des ouvertures différentes, nous aurons soin de résoudre les problêmes avec le moindre nombre possible d'ouvertures de compas. Il seroit même mieux que l'artiste eût à sa dis-

position autant de ces compas *fidèles* (ainsi appelés, parce qu'on peut s'assurer qu'ils conservent exactement l'ouverture donnée), qu'il y a d'ouvertures exigées par la solution du problême ; car il arrivera souvent que nous serons obligés de nous servir plusieurs fois de la même ouverture, après en avoir employé une ou plusieurs autres : alors, sans élargir ou resserrer un seul compas, nous reprendrons le compas mis de côté qui conserve cette ouverture. C'est pourquoi nous appellerons quelquefois du nom de premier, second, troisième compas, les ouvertures successives avec lesquelles on aura résolu le problême.

9. D'ailleurs, comme pour la précision pratique de la position d'un point, il importe que la section des lignes qui le déterminent se fasse à angle droit ou approchant, nous ferons toujours en sorte qu'un arc en coupe un autre, ou à angle droit, ou au moins sous un angle qui en diffère peu.

Afin d'être plus courts, sans cependant devenir obscurs, en indiquant la construction des figures, nous emploierons souvent des expressions abrégées, que la seule inspection de la figure fera bientôt comprendre. Par

exemple, dans la figure 2, au lieu de dire : « *Avec le rayon* AB, *et du centre* B, *soit* » *décrit un arc qui coupe la circonférence* » BCD *au point* C; *puis avec le même* » *rayon et du centre* C, *qu'on décrive un* » *arc qui coupe la même circonférence en* » D, *etc.* », nous dirons seulement : « *Soit* » *fait à* AB = BC = CD, etc. » En effet, c'est assez dire que les points *B*, *C* et *D*, avec lesquels on indique la même circonférence *BCD*, sont des points de cette circonférence ; ainsi il n'y a aucun risque d'équivoque.

11. De même étant donnés, par exemple, trois intervalles *AB*, *CD*, *EF*, quand on dira : « *Soit fait à* CD = EG, *à* AB = FG, » on devra entendre ceci : « *Avec* » *un rayon* CD, *et du centre* » E, *soit décrit un cercle* » *dans la circonférence duquel soit le point* » G; *ensuite, avec l'intervalle* AB *et du* » *centre* F, *soit décrit un autre cercle qui* » *coupe le premier au point* G. »

B A
C D
G
E F

12. D'autres fois, dans les démonstrations,

nous désignerons quelques lignes droites qui ne seront pas dans la figure, en nommant les deux points extrêmes auxquels elles devroient être menées, comme si, dans la figure 11, on nommoit la droite *A B*, ou bien *C D*. C'est ainsi que nous ferons quand il n'y aura pas à craindre d'obscurité, pour conserver la figure nette, et faire mieux paroître la construction faite avec le seul cercle.

13. *Lemme.* Si des deux centres *A* et *B*, et avec les rayons *A P* et *A Q*, on décrit des arcs qui se coupent en *P* et *p*, *Q* et *q*, les points *Q*, *q*, *P* et *p* seront dans la même ligne droite.

Démonstration. Tous les côtés des triangles *A P p*, *B P p* [*fig.* 3], étant respectivement égaux entr'eux par construction, l'angle *A P p* sera égal à l'angle *B P p*, (8. *liv.* 1). On démontre de même que $APQ = BPQ$. Donc $APp + APQ = BPp + BPQ$. Mais la somme de ces quatre angles est égale à quatre angles droits (13. *liv.* 1. *coroll.*). Donc chacune des sommes de deux angles est égale à deux angles droits. Donc la ligne *Q P p* est droite (14. *liv.* 1). On démontre de la même manière que la

ligne Ppq est droite. Donc les points Q, P, p, q sont dans la même ligne droite.

14. Les choses étant comme au numéro précédent, les droites AB, Bp, ainsi que celles AB, Qq, se couperont à angles droits en deux parties égales au point M, et les droites QP, qp seront égales.

Démonstration. En effet, à cause de l'égalité des côtés des deux triangles APB, ApB, on a l'angle $PAB = pAB$ (8. *liv.* 1). Mais on a encore $APp = ApP$ (5. *liv.* 1). Donc aussi $AMP = AMp$ (*coroll. prop.* 32, *liv.* 1). Donc ces deux angles sont droits (13. *liv.* 1), et la ligne Pp sera partagée en deux parties égales au point M par la démonstration de la propos. 10. liv. 1. On démontrera de la même manière que les droites Qq et AB sont divisées en deux parties égales au point M. Donc, en retranchant des droites égales QM et qM, les parties égales PM, pM, les restes QP, qp seront égaux.

15. *Corollaire.* On aura donc : $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$ (47. *liv.* 1).

16. *Lemme.* Tout étant comme au numéro 13, on aura :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ.$$

Démonstration. Car on a $(AQ)^2 = (AP)^2$

$+(PQ)^2 + 2\,MP.PQ$ (12. *liv.* 2). Mais on a $2MP = Pp$ (14). Donc, etc.

17. *Lemme.* On aura donc $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - Pp\,.\,pQ$.

Démonstration. Car on a $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - 2\,pM\,.\,pQ$ (13. *liv.* 2). Mais on a $2\,pM = pP$ (14). Donc, etc.

18. *Corollaire* 1.er Puisque $pQ = pP + PQ$; on aura : $(pQ)^2 = pP.pQ + PQ.pQ$ (2. *liv.* 2) : d'où, en soustrayant $pP.\,pQ$, on a : $(pQ)^2 - pP.pQ = PQ\,.\,pQ$; et substituant cette valeur dans celle de $(AQ)^2$ (17), on aura :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ\,.\,PQ.$$

D'où l'on tire, en soustrayant $(Ap)^2$ de part et d'autre : $(AQ)^2 - (Ap)^2 = pQ.PQ$.

Donc (en effectuant la multiplication de $AQ + Ap$ par $AQ - Ap$) on trouvera : $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = (AQ)^2 - (Ap)^2$; et par conséquent : $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = pQ\,.\,PQ$: d'où (par la 16.e propos. du liv. 6) on déduit la proportion

$$pQ : AQ + Ap :: AQ - Ap : PQ :$$

où substituant de même AP au lieu de Ap, et transposant les extrêmes :

$$PQ : AQ + AP :: AQ - AP : PQ.$$

De ces deux proportions, on déduit expressément ce fameux théorême :

Dans un triangle quelconque, un côté quelconque est à la somme des deux autres côtés, comme leur différence est à la différence ou à la somme des segmens que fait sur ce côté la perpendiculaire menée de l'angle opposé, suivant qu'elle tombe en dedans ou au dehors du triangle.

19. *Corollaire* 2. On aura $A Q = p Q$. Otant de part et d'autre les deux termes égaux $(A Q)^2$, $(p Q)^2$, et ajoutant des deux côtés la partie $p P . p Q$, on aura $p P . p Q = (A p)^2$.

20. *Lemme.* Tout étant comme dans le n.° 13, si l'angle $R p Q$ est droit, [*fig.* 4.] et que l'angle $R p S = R p A$, et $p S = p R = p A$, $A S$ sera parallèle et égale à $P p$; et on aura $(A Q)^2 = (R Q)^2 - A S . P Q$.

Démonstration. En effet, si des deux angles droits $R p Q$, $R p q$, on soustrait les deux angles égaux $R p A$, $R p S$, il restera les deux angles égaux $A p P$, $S p q$. Mais $A p P = A P p$. (5. *liv.* 1.) Donc $S p q = A P q$. Donc $A P$, $S p$ sont parallèles (29. *liv.* 1.) Mais elles sont aussi égales par construction. Donc les deux droites $A S$, $P p$, sont égales et parallèles (33. *liv.* 1.)

On a aussi $(R Q)^2 = (R p)^2 + (p Q)^2$ (47. *liv.* 1.) $= (A p)^2 + (p Q)^2$; et par le *lemme* 17, $(A Q)^2 = (A p)^2 + (p Q)^2$

$- pP . pQ$. Donc $(AQ)^2 = (RQ)^2 - pP . pQ, = (RQ)^2 - AS . pQ$.

21. *Lemme.* Tout étant comme dans les n.[os] 13 et 20, on aura $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS . pQ$.

Démonstration. En effet, si on fait $ST = Sp$, $pT = pP$, (11) les deux triangles SpT, APp auront les angles SpT, APp égaux entr'eux (8. *liv.* 1.) Donc la ligne PpT est droite. (27. *liv.* 1.) On aura ensuite $(SQ)^2 = (pS)^2 + (pQ)^2 + pQ . pT$ (16.) Mais on a $(pS)^2 + (pQ)^2 = (pR)^2 + (pQ)^2 = (RQ)^2$; et $pT = pP = AS$. Donc $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS . pQ$.

Des deux *lemmes* précédens, il résulte ce corollaire que : $(AQ)^2 + (SQ)^2 = 2(RQ)^2$.

22. *Lemme.* Si on a $AQ = pQ = BQ$, et $Ap = pB = pS$, pS étant sur le prolongement de Bp, on aura $AS . pQ = (Ap)^2$.

Démonstration. Les triangles isoscèles AQp, BQp ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $QpA = QpB$ (8. *liv.* 1.) On aura ensuite l'angle ApB, qui est la somme des deux autres, égal aussi à la somme des deux angles SAp, ASp (32. *liv.* 1.); qui sont égaux entr'eux, parce que le triangle

A p S est isoscèle (5. *liv* 1.); chacun d'eux sera égal à l'angle $ApQ = pAQ$ (5. *liv.* 1.) On aura donc le triangle *p A S* semblable au triangle *Q p A* (32. *liv.* 1. 4. *liv.* 6.) Et de-là, $pQ : Ap :: Ap : AS$ et $AS . pQ = (Ap)^2$. (17. *liv.* 6.)

23. *Lemme.* Si on a $AB = AC = BD$, et $AD = BC$, on aura : $DC . AB = (AB)^2 - (AD)^2$.

Démonstration. Les deux triangles *A D B*, *A C B* [*fig.* 5.] ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux. (8. et 26. *liv.* 1.) Puis tous les deux étant posés sur la même base *A B*, seront compris entre les mêmes parallèles *D C*, *A B*, (39. *liv.* 1.) Si donc sur la ligne *B A* on prend $BE = DC$, *D E* sera égale et parallèle à *B C* (33. *liv.* 1.) et aussi égale à *D A*; d'où les deux triangles isoscèles *B D A*, *D A E*, qui ont un angle commun en *A*, seront semblables (5, 32. *liv.* 1, et 4. *liv.* 6.) et on aura $AB : AD :: AD : AE$; ce qui donne $AB . AE = (AD)^2$ (17. *liv.* 6.) On a ensuite $AB . AE + AB . BE = (AB)^2$ (2. *liv.* 2.); et substituant pour $AB . AE$ sa valeur $(AD)^2$ et *D C* à la place de *B E*, on a $(AD)^2 + AB . DC = (AB)^2$. Enfin, soustrayant $(AD)^2$ on aura $DC . AB = (AB)^2 - (AD)^2$.

24. *Lemme*. Si dans le cercle $B\mu G$, [*fig.* 6] décrit d'un rayon AB, on élève au centre A la perpendiculaire Ae égale à la corde BG de l'arc $B\mu G$, et que du point e comme centre, et d'un rayon AB, on décrive un arc qui coupe la circonférence au point μ, l'arc $B\mu$ sera égal à la moitié de l'arc $B\mu G$.

Démonstration. A cause de l'égalité des côtés des deux triangles ABG, $A\mu e$, on a l'angle $GAB = A\mu e$ (8. *liv.* 1.) Soit divisé par la moitié l'angle $A\mu e$ par la droite μM, le triangle μeA étant isoscèle, on a l'angle $\mu eM = \mu AM$; ensuite les deux triangles μeM, μAM ayant leurs deux autres angles égaux, on aura encore le triangle $\mu Me = \mu MA$. (*Coroll.* 32. *liv.* 1.); d'où μM est perpendiculaire à Ae (13 *liv.* 1.), et parallèle à AB, (29. *liv.* 1.), et on aura l'angle $M\mu A = \mu AB$, (27. *liv.* 1.) : donc μAB sera la moitié de l'angle GAB; donc aussi l'arc $B\mu$ sera la moitié de l'arc $B\mu G$.

25. Si dans le parallélogramme $ABMN$, [*fig.* 7] on a la diagonale MA égale aux côtés opposés MB, AN, le quarré de l'autre diagonale BN est égal au quarré de la première, plus aux deux quarrés des deux autres côtés.

Démonstration. Soit divisé AB en deux parties égales au point m par la perpendiculaire Mm (10. 11. *liv.* 1.) ; et sur la droite BA prolongée, soit pris $An = Bm$, on aura $mn = BA = MN$. On aura donc le parallélogramme $MNnm$ (33. *liv.* 1.), et l'angle NnB sera droit (27. *liv.* 1). D'où $(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 + 2AB \,.\, An$ (12. *liv.* 2). Mais $An = \frac{1}{2} AB$. Donc $(BN)^2 = (AN)^2 + 2(AB)^2 = (AN)^2 + (AB)^2 + (MN)^2$.

26. Si dans un triangle quelconque BPE, [*fig.* 8] on coupe en deux parties égales au point A la base BE, et que de l'angle opposé P, on mène la droite PA, la somme des quarrés des côtés BP et PE sera égale à la somme des quarrés égaux des deux segmens, en y ajoutant le double quarré de la droite AP.

Démonstration. En effet, si on abaisse la perpendiculaire PR sur la base BE, on aura $(BP)^2 = (BA)^2 + (AP)^2 + 2BA \,.\, AR$ (12. *liv.* 2). On aura donc $(PE)^2 = (AE)^2 + (AP)^2 - 2AE \,.\, AR$ (13. *liv.* 2). Donc après avoir formé la somme des valeurs des deux quarrés $(BP)^2$ et $(PE)^2$, et de plus BA étant égal à AE, on aura $(BP)^2 + (PE)^2 = (BA)^2 + (AE)^2 + 2(AP)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$.

GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.
LIVRE SECOND.

DE LA DIVISION DE LA CIRCONFÉRENCE ET DES ARCS DU CERCLE.

PROBLÊME.

27. *PARTAGER la circonférence du cercle* BDd *en quatre parties égales.*

Solution. Soit fait dans la même circonférence [*fig.* 9.] au rayon $AB=Bc=BC=CD=DE=Ed$, avec le premier compas (8), on aura $dc=cB=BA$ (15. *liv.* 4).

Soit fait aussi à $BD=Ba=Ea$ avec le second compas, et à $Aa=BF=Bf$ avec le troisième compas. On aura divisé la circonférence en quatre parties égales BF, FE, Ef, fB.

Démonstration. BAE étant un diamètre (15. *liv.* 4.), et les triangles aAB, aAE ayant tous leurs côtés égaux, et, par conséquent les angles aAB, aAE aussi égaux

(8 *liv.* 1.), ces deux angles seront droits (13. *liv.* 1). Donc $(aB)^2 = (AB)^2 + (aA)^2$ (47. *liv.* 1); et soustrayant de part et d'autre $(AB)^2$, on a : $(aB)^2 - (AB)^2 = (aA)^2$. Soit fait pour abréger $AB = 1$, on aura $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ (2). Donc $(aA)^2 = 3 - 1 = 2$, et encore $(BF)^2 = (aA)^2 = 2 = 1 + 1 = (AB)^2 + (AF)^2$. Donc, dans le triangle *FAB*, l'angle *FAB* sera droit (48. *liv.* 1); et par conséquent aussi *FAE* (13. *liv.* 1). Donc les arcs *BF*, *FE* seront égaux entr'eux et quarts de cercle, ainsi que les arcs *Bf*, *fE*.

28. *Corollaire.* Les angles *BAa*, *BAF* étant droits, les trois points *A*, *F*, *a* seront dans la même ligne droite.

29. Nous avons donc déjà la circonférence divisée, savoir, en deux parties égales aux points *B* et *E*; en trois parties, aux points *B*, *D*, *d* (15. *liv.* 4); en quatre points, aux points *B*, *F*, *E*, *f* (27); en six parties, aux points *B*, *C*, *D*, *E*, *d*, *c* (15. *liv.* 4).

PROBLÈME.

Diviser une circonférence en huit parties égales.

Solution.

Solution. Tout étant comme au n.° 27, soit fait à $A B = a G = a H$ [*fig.* 9.], avec le premier compas, à $A a = G g = H h$ avec le troisième compas, on aura aussi $g h = A a$, et la circonférence sera divisée en huit parties égales aux points B, G, F, H, E, h, f, g.

Démonstration. Puisque $(A a)^2 = 2.$ (27), on aura $(A a)^2 = (A G)^2 + (a G)^2$. L'angle $a G A$ sera donc droit (48. *liv.* 1). D'où, à cause du triangle isoscèle $a G A$, les deux autres angles $G A a$, $G a A$, égaux entr'eux, (5. *liv.* 1.) vaudront chacun la moitié d'un angle droit (32. *liv.* 1.) Donc l'angle $G A F$, qui est le même que l'angle $G A a$ (28) sera la moitié de $B A F$: donc aussi l'arc $G F = B G$. Mais, par construction, on a $G g = B F$ (26. *liv.* 3.): donc, ôtant de part et d'autre $B G$, on aura $G F = B g$. On démontreroit de même que les autres arcs sont égaux. Donc la circonférence sera divisée en parties, égales chacune à la moitié du quart, et par conséquent en huit parties.

PROBLÈME.

31. *Diviser la circonférence en douze parties égales.*

Solution. Les choses étant comme au n.° 27, qu'on fasse [*fig*. 9.] à $AB = FN = Nn = FO = Oo$. La circonférence sera divisée en douze parties égales aux points $B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n$.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux BF, FE, on retranche les arcs égaux BC, DE, les arcs restans CF, FD seront égaux. Or l'arc CD est la sixième partie de la circonférence; donc l'arc CF sera la moitié de cet arc, et par conséquent le douzième de la circonférence. A cause de $FN = CD$, on aura encore $CF = CN$. Donc aussi à cause de $FN = CB$, on aura $CN = NB$. On démontrera de la même manière que chacun des autres arcs est le douzième de la circonférence.

PROBLÊME.

32. *Diviser la même circonférence en vingt-quatre parties égales.*

Solution. Les choses étant comme ci-dessus (30 et 31), soit fait [fig. 9.] à $AB = GL = LM = Gk = ki = HI = IK = Hm = ml$, de la première ouverture decompas, et le problême sera résolu.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux

GF, *GB* (30), on retranche les arcs égaux *CF*, *NB* (31), les restes *GC* et *GN* seront égaux. Or *CN* est la douzième partie de la circonférence. Donc *GC* et *GN* en seront les vingt-quatrièmes parties.

On a ensuite $FN = GL$; retranchant la partie commune *FG*, on aura $NG = FL$. Donc aussi *FL* sera la vingt-quatrième partie de la circonférence, et par conséquent, la moitié de *FD* (31). On démontrera de la même manière que les arcs *DH*, *HO*, *FI*, *IC* sont égaux, ainsi que tous les autres qui ont été déterminés ci-dessus.

33. Pour être plus courts, nous continuerons à nous servir, sans les citer, ainsi que nous venons de le faire, des propositions 26 et 27 du *livre* 3 *d'Euclide*, que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les droites égales sous-tendent des arcs égaux.

34. Les Anciens, au moyen du centre *A* et du rayon *AB*, divisoient, avec le compas seulement, la circonférence en six parties égales. Ils obtenoient les autres divisions avec la règle et le compas, en prenant différens points hors de la circonférence. Nous sommes parvenus à déterminer un point *a*,

qui seul suffit pour la diviser en vingt-quatre parties égales avec le compas seulement; ce qui est en même-tems plus expéditif, plus commode, et beaucoup plus exact que les méthodes des Anciens.

35. On peut remarquer en même-tems la loi élégante que suivent les ouvertures de compas suffisantes pour cette division.

L'ouverture du premier compas $= \sqrt{1}$, celle du 3.^{e} $= \sqrt{2}$, et celle du 2.^{e} $= \sqrt{3}$.

36. *Lemme*. Si dans le cercle BGE, on a le rayon $AB = 1$, et que l'arc BG soit la huitième partie de la circonférence, on aura le quarré de sa corde BG, c'est-à-dire $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

Démonstration. Sur le diamètre BE, soit abaissée la perpendiculaire GP. Dans le triangle rectangle GPA, à cause de l'angle $BAP = 45^o$ on aura aussi $AGP = 45^o$ (32. *liv.* 1.), et par conséquent $GP = PA$. Or, on a $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$ (47. *liv.* 1). Donc $(AG)^2 = 2(AP)^2$, ou $2(AG)^2 = 4(AP)^2$, ou encore $2 = (2AP)^2$: donc $\sqrt{2} = 2AP$; $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $BP = AB - AP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. On a ensuite, à cause de l'angle droit BGE (31. *liv.* 3.) BP:

$BG :: BG : BE$ (8. 4. *liv.* 6). Donc (17. *liv.* 6.) $(BG)^2 = BP \times BE = 2BP$. Donc $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

37. *Lemme.* Les choses étant comme au n.° 36, on aura $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Démonstration. $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$ (47. *liv.* 1). Mais $(BE)^2 = 4$; $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (36) : donc $4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2}$: donc $2 = (GE)^2 - \sqrt{2}$, et par conséquent $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

PROBLÈME.

38. *La circonférence étant déjà divisée en vingt-quatre parties égales* (32), *la sous-diviser en quarante-huit.*

Solution. Soit fait à $aN = Be = Ee$ (11) avec un quatrième compas, et à $AB = e\mu = e\nu$ avec le premier compas. Les arcs $K\mu$, μN, $M\nu$, νO seront les quarante-huitièmes parties de la circonférence.

Démonstration. Si on conçoit les droites Aa, Nn, aN, aB (12), l'angle BAa étant droit, l'angle $BAN = BAn$ (31) et les trois rayons AN, AB, An égaux, on aura $(aN)^2 = (aB)^2 - Nn \cdot Aa$ (20). Donc, à cause de $aN = Be$, on aura aussi

$(Be)^2 = (aB)^2 - Nn \,.\, Aa$. De plus, les triangles eAB, eAE étant rectangles en A (8. 13. *liv.* 1), puisque leurs côtés sont respectivement égaux, on aura $(Be)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2$ (47. *liv.* 1), et par conséquent $(AB)^2 + (Ae)^2 = (aB)^2 - Nn.Aa$; mais on a $(aB)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2$. Donc $(AB)^2 + (Ae)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2 - Nn \,.\, Aa$; d'où, retranchant $(AB)^2$ de part et d'autre, on a $(Ae)^2 = (Aa)^2 - Nn \times Aa$. Mais $(Aa)^2 = 2$ (27) et $Nn = 1$, puisque Nn est la corde d'un arc de 60 degrés (31). Donc $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2} =$ le quarré de la corde de l'arc BG, qui est la huitième partie de la circonférence (30 et 36). On aura donc l'arc $B\mu = \mu G$ (24); retranchant ensuite de chacun de ces arcs, les arcs égaux BK, NG (32), les restes $K\mu$, μN seront égaux; et comme l'arc KN est la vingt-quatrième partie de la circonférence (32), chacun d'eux en sera la moitié, et par conséquent la quarante-huitième partie de la circonférence. Il en sera de même des arcs $K\mu$, μN, $M\nu$, et νO.

39. On pourroit aussi avec la même construction [*fig.* 11], par le moyen des quatre compas ci-dessus indiqués, diviser la circonférence en quarante-huit parties égales (8).

En effet, si avec le premier compas d'une ouverture = *A B*, on divise la circonférence en six parties, en commençant du point μ, les arcs *I F*, *H O*, *m o*, *f l*, *n g* seront partagés en deux parties égales; puis divisant la circonférence en six parties, en commençant du point ν, on aura divisé en deux parties égales les arcs *o h*, *f i*, *n k*, *N G*, *F L*. Divisant ensuite la circonférence en quatre parties avec le troisième compas d'une ouverture égale à *A a*, en partant du point μ, les arcs restans *L D*, *i c* seront divisés en deux parties égales; et en partant du point ν, on partagera de même les arcs *I C*, *l d*. Enfin divisant encore avec le premier compas la circonférence en six parties égales, mais en partant des derniers points trouvés avec le troisième compas, tous les autres arcs seront divisés en deux parties égales.

La démonstration est la même que celle n.º 32.

PROBLÊME.

40. *Diviser la circonférence* BDd *en cinq parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problême du numéro 31, qu'on fasse [*fig.* 12]

à $A a = N b = O b$, avec le troisième compas. Qu'on fasse à $Bb = BQ$, l'arc $B Q$ sera la cinquième partie de la circonférence.

Démonstration. Si on conçoit menées les deux droites $N O$, $A F$, qui se coupent en X, à cause des triangles équilatéraux $F N A$, $F O A$, la droite $A F$ sera divisée en deux parties égales au point X (10. *liv.* 1), ainsi que $N O$ (14). Puis l'arc $N F O$ étant égal à l'arc $B C D$ (31), le quarré de sa corde $N O$ sera égale au quarré de la corde $B D = 3$ (2). D'où le quarré de sa moitié, c'est-à-dire, $(N X)^2 = \frac{3}{4}$ (*prop.* 4. *liv.* 2. *coroll.*). De plus, les points b, A, X sont en ligne droite, et le triangle $N b X$ est rectangle (12, 13, 14). On a aussi $(N b)^2 = (A a)^2 = 2$ (27). D'où on tire : $(X b)^2 = (N b)^2 - (N X)^2$ (47. *liv.* 1) $= 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

Mais à cause de l'angle droit $X A B$, qui est le même que $F A B$, on a $(B X)^2 = (A B)^2 + (A X)^2$ (47. *liv.* 1). D'ailleurs, on a : $(A X)^2 = \frac{1}{4} (A F)^2$ (*prop.* 4. *du liv.* 2. *coroll.*). Donc $(B X)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (X b)^2$. Donc les droites $B X$, $X b$ sont égales. Donc on aura le point b, le même qu'emploie Ptolomée dans le premier livre de l'Almageste, pour inscrire dans un cercle un pentagone et un décagone régulier. *Voyez* la

démonstration de Clavius dans le scholie dépendant de la proposition 10. du liv. 13 d'Euclide. *Voyez* aussi les numéros suivans (45, etc.) qui fourniront la démonstration complète de cette proposition et des suivantes.

PROBLÈME.

41. *Diviser la circonférence en dix parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problême précédent (40), qu'on fasse [*fig.* 12] à $A\,b = B\,P$, on aura $B\,P = P\,Q$. Chacun de ces arcs est égal à la dixième partie de la circonférence.

Démonstration. Voyez la 10. propos. du livre 13 d'Euclide.

PROBLÊME.

42. *Diviser la circonférence en cent vingt parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans les numéros 32 et 40, $Q\,I$ [*fig.* 12] sera la cent vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, l'arc $B\,I$ est égal à cinq vingt-quatrièmes (32), et l'arc $B\,Q$

à la cinquième partie de la circonférence. Donc $QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25-24}{120}$ $= \frac{1}{120}$.

43. Maintenant on pourra, quand on voudra, avec quatre compas seulement, ou quatre ouvertures du même compas, et avec les deux seuls points a et b pris hors de la circonférence, diviser la circonférence du cercle en cent vingt parties égales. En effet, après avoir, avec le point a, et avec trois compas, divisé la circonférence en vingt-quatre parties (*problême du numéro* 32), et ayant trouvé le point b (40), qu'on fasse, avec le quatrième compas, à $Ab = BP = PQ = QR = RS$, et par conséquent aussi $= SE$ (41). Ensuite, pour diviser l'arc NG en cinq parties égales, dont chacune soit la cent vingtième de la circonférence, qu'on fasse à $Ab = Lq = qp = I\pi = O\rho = \rho\omega$ $= \omega\phi$. L'arc NG sera divisé en cinq parties égales, et on pourra diviser de la même manière tous les autres arcs GC, CI, etc.

Démonstration. Puisqu'on a $BQ = RE$, $BF = FE$, $IF = FL$, on aura aussi IQ $= LR$; et comme $Lq = QR$, on aura aussi $Qq = LR = QI$. De même QP étant égal

à $q p$, $Q p$ sera aussi égal à $P p$ et à $Q I$. Pareillement, à cause de $I\pi = Q P$, on aura $\pi P = Q I$; et comme on a $O\omega = B Q$, $O I = I B$, on aura encore $I\omega = Q I$. De plus, à cause de $\omega\phi = I\pi$, on a $I\omega = \phi\pi = Q I$: puis, comme on a $O\phi = O\rho + \rho\omega + \omega\phi = B P + P Q + Q R = B R$, en retranchant de part et d'autre les arcs égaux $O G$, $B L$, on aura pour reste $G\phi = L R = Q I$. Enfin, à cause de $B I = L N$, si on retranche les arcs égaux $B Q$, $L p$, on aura pour reste $Q I = N p$. Donc on aura divisé l'arc $N G$ en cinq arcs $N p$, $p P$, $P\pi$, $\pi\phi$, ϕG égaux chacun à l'arc $Q I$, et par conséquent égaux entr'eux; et puisque l'arc $N G$ est un vingt-quatrième de la circonférence (32), sa cinquième partie en sera le cent vingtième.

44. Nous avons donc jusqu'à présent fait, sans aucun autre instrument que le compas, les mêmes divisions en parties égales de la circonférence, que celles que faisoient les Anciens en inscrivant au cercle les cinq polygones réguliers; savoir : le triangle, le quarré, le pentagone, l'exagone et le décagone, et en joignant l'usage de la règle à celui du compas, tandis que l'on y est parvenu d'une manière commode, en prenant seulement deux points hors de la circonfé-

rence, et en n'employant que quatre ouvertures d'un seul compas, ou bien quatre compas (43. 8). En comparant cette méthode avec la méthode connue, on pourra juger de sa simplicité, de sa briéveté et de sa précision dans la pratique.

45. Comme on a par le n.° 40 :
$Xb + XF = Fb = Xb + XA$
et $Ab = Xb - XA$,
on aura $Fb \cdot Ab = (Xb)^2 - (XA)^2 = (XB)^2 - (XA)^2 = (AB)^2$; ou bien $Fb \cdot Ab = (FA)^2$: donc la droite Fb sera divisée au point A en moyenne et extrême raison (30. *liv.* 6).

46. On aura donc $Fb \cdot Ab = (FA + Ab) \cdot Ab = (fA)^2 = (fA + Ab) \cdot Ab = fA \cdot Ab + (Ab)^2 = fA(fA - fb) + (Ab)^2 = (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$. Ayant donc $(fA)^2 = (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$, retranchant $(fA)^2$, et ajoutant $fA \cdot fb$, on aura $fA \cdot fb = (Ab)^2$: donc aussi la ligne Af sera divisée en b, en moyenne et extrême raison.

47. Si du centre b, et d'un rayon bA, on décrit un arc qui coupe la circonférence au point T, on aura $Tf = Tb = bA$. En effet, on aura $fA \cdot fb = (Ab)^2 = (Tf)^2$:

d'où (17. *liv.* 6) on tire cette proportion $fA : fT :: fT : fb$. Donc les deux triangles fAT, fbT, qui ont l'angle en f commun, auront leurs côtés contigus proportionnels : donc (6. *liv.* 6) ils seront semblables : donc aussi le triangle fbT sera isoscèle; ce qui donne $Tb = Tf$.

48. L'angle $TbA = Tfb + bTf$ (32. *liv.* 1) $= Tbf + bAT$; en ajoutant Tbf, on aura $TbA + Tbf = 2\,Tbf + bAT$; mais $TbA + Tbf$ valent deux angles droits (13. *liv.* 1.) : donc $2\,Tbf + bAT$ valent deux angles droits. Mais $Tbf = bAT + bTA$ (32. *liv.* 1) $= 2\,bAT$. (5. *liv.* 1). Donc $2\,Tbf + bAT = 5\,bAT =$ deux angles droits. Donc l'angle bAT, qui est le même que l'angle fAT, sera un cinquième de deux angles droits, et l'arc fT un dixième de la circonférence.

49. Si on prend la corde $ft = fT$, on aura aussi $bt = ft$ (47), et les deux droites tT, bf se couperont au milieu à angles droits en un point y (14); alors on aura $(Tf)^2 = (Ty)^2 + (fy)^2$; d'où on tire $4(Tf)^2 = 4(Ab)^2 = 4(Ty)^2 + 4(fy)^2 = (Tt)^2 + (fb)^2$; et $(Tt)^2 = 4(Ab)^2 - (fb)^2$. Mais $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 -$

$2fA.Ab+(Ab)^2$. Donc $(Tt)^2=3(Ab)^2-(fA)^2+2fA.Ab$. Or $2fA.Ab=2fA(fA-fb)=2(fA)^2-2fA.fb=2(fA)^2-2(Ab)^2$. Donc $(Tt)^2=3(Ab)^2-(fA)^2+2(fA)^2-2(Ab)^2=(fA)^2+(Ab)^2=(BA)^2+(Ab)^2=(Bb)^2$. Donc aussi $Tt=Bb$; mais Tt est la corde de deux dixièmes, ou d'un cinquième de la circonférence. Donc Bb l'est aussi; donc:

50. *Dans le triangle rectangle* A B b, *le quarré du côté du pentagone est égal à la somme des quarrés des côtés de l'exagone et du décagone.* Cette proposition est la 10.e du *liv.* 13 d'Euclide.

51. Les côtés du triangle rectangle ABb sont cordes d'arcs qui sont en progression contre harmonique. Car ces arcs sont $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ de la circonférence, et on trouve cette proportion : $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}:\frac{1}{6}-\frac{1}{10}::\frac{1}{10}:\frac{1}{5}$.

52. Des proportions $fb:bA::bA:Af$ (46), et $fb:bA::bA:AF$, il suit que le diamètre Ff est divisé aux points A et b en trois parties qui sont en proportion continue.

PROBLÈME.

53. *Diviser la circonférence en vingt parties, c'est-à-dire trouver la vingtième partie de la circonférence.*

Solution. Tout étant comme au n.° 40, soit fait dans lequart de cercle *B V f*, *f v* = *B b*, l'arc *B V* sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, on a $BV = Bf - fV = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ (40) $= \frac{1}{20}$.

Autre solution. Tout étant aussi comme au n.° 40, soit fait dans le quart de cercle *B V f*, *b V* = *A B*, l'arc *B V* sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. La droite *A b* étant la corde de la dixième partie de la circonférence, l'arc *B V* sera la moitié de cette dixième partie, c'est-à-dire, la vingtième (24).

54. A cause de *V b* = *V A*, le triangle *A V b* est isoscèle, ainsi que *b T f*. De plus, comme on a *F A* : *A b* :: *A b* : *b f* (52), ou en substituant des valeurs égales : *V A* : *A b* :: *T b* : *b f*, les deux triangles isoscèles auront leurs côtés proportionnels : donc ils seront semblables. (6. *liv.* 6.)

55. Comme on a aussi $bF : FA :: FA : Ab$ (45, et 17. *liv.* 6), en substituant des valeurs égales, on aura $bF : bV :: bV : Ab$. Donc les côtés qui forment l'angle commun en b, dans les deux triangles bFV, bVA, seront proportionnels, et par conséquent ces triangles seront semblables (6. *liv.* 6). Donc aussi le triangle bFV sera isoscèle, et on aura $FV = Fb$.

56. L'arc fV étant un cinquième (53), et l'arc fT un dixième de la circonférence (47), l'arc TV en sera aussi un dixième; d'où la corde $TV = Tf = Tb = bA$. Mais on a aussi $Vb = TA$ (53). Donc les deux triangles VTb, TbA seront égaux, puisqu'ils auront tous leurs côtés respectivement égaux. (8. 4. *liv.* 1.)

PROBLÈME.

57. *Diviser une circonférence en 240 parties égales.*

Solution. Tout étant comme au n.° 43, soit divisé par le moyen donné (38, 39) l'arc NG au point δ en deux parties égales, ce qu'on peut faire en faisant les cordes $\gamma\beta$, $\beta\delta$ égales au rayon $e\gamma$. Les deux arcs $P\delta$, $\delta\pi$ vaudront

vaudront chacun la deux cent quarantième partie de la circonférence. *Voyez* encore le n.º 58.

Démonstration. En effet, soustrayant des deux moitiés $N\delta$, $G\delta$, les arcs égaux NP, $G\pi$ (43), il restera $P\delta = \delta\pi$. Mais $P\pi$ est la cent vingtième partie de la circonférence (43); donc, etc.

58. On pourra, avec une ouverture de compas prise du point δ à un point quelconque N de la division déjà obtenue (43), continuer à diviser en deux toutes les cent vingtièmes parties de la circonférence. Par exemple, avec cette ouverture, en plaçant le centre en p, on divisera l'arc $\pi\phi$; en plaçant le centre en P, on divisera l'arc ϕG, et ainsi de suite.

59. Les trois points a et b [*fig.* 12] et e [*fig.* 11] sont très-remarquables. Car, au moyen de ces seuls points pris hors de la circonférence, nous avons divisé la même en deux cent quarante parties égales, et nous sommes ensuite parvenus à en déterminer la deux cent quarantième partie, en n'employant que les cinq ouvertures de compas AB, BD, Aa, aN, Ab. Comme ces points peuvent servir dans la suite à plusieurs autres usages

importans, nous trouverons, par rapport à eux, trois équations fondamentales, desquelles nous retirerons, quand il sera à propos, douze autres équations, et dont nous ferons voir les applications, lorsque l'occasion s'en présentera.

PROBLÈME.

60. *Diviser un arc quelconque* BC [fig. 13] *en deux parties égales en* G.

Solution. Avec le rayon *AB*, qui a décrit l'arc *BC* à diviser, et des centres *B* et *C*, qui sont les deux extrémités de l'arc, soient décrits les arcs *AD*, *AE*; qu'on fasse à *BC* = *AD* = *AE* (10); puis des centres *D* et *E*, et d'un rayon *DC* = *BE*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *F*. Maintenant avec le rayon *AF*, et des mêmes centres *D* et *E*, qu'on décrive deux autres arcs qui se coupent en *G*, le point *G* sera sur la circonférence, et on aura l'arc *BG* = *GC*.

Démonstration. Les côtés des trois triangles *DBA*, *BAC*, *ACE*, étant respectivement égaux, on aura l'angle *BCA* = *CAE* (8. *liv.* 1). Donc *BC* sera parallèle à *AE* (28. *liv.* 1) : donc *BAEC* sera un parallélogramme (33. *liv.* 1).

On prouvera de la même manière que $BCAD$ est un parallélogramme. On a ensuite, dans le parallélogramme $BCAD$, la diagonale AB égale aux côtés opposés BD, AC. Donc le quarré de la diagonale DC sera égal à la somme du quarré de l'autre diagonale AB, et des quarrés des deux côtés AD, BC (25), c'est-à-dire, $(DC)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; et comme les deux droites DA, AE sont parallèles à la droite BC, les points D, A, E seront dans la même ligne droite. De plus, les triangles FAD, FAE ayant tous leurs côtés égaux, les angles FAD, FAE seront égaux (8. *liv.* 1), et par conséquent droits (13. *liv.* 1). On aura donc $(DF)^2 = (AD)^2 + (AF)^2$; mais $(DF)^2 = (DC)^2$. Donc $(AD)^2 + (AF)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; et ôtant $(AD)^2$, on aura $(AF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$. Mais $(DG)^2 = (AF)^2$: donc $(DG)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$; et parce les triangles GAD, GAE ont leurs côtés égaux, les angles GAD, GAE sont égaux et droits (8) (13. *liv.* 1). Donc $(DG)^2 = (AG)^2 + (AD)^2$: donc $AB = AG$, et par conséquent le point G est sur la circonférence. Otant ensuite des angles droits GAD, GAE, les angles égaux BAD, CAE, les angles restans

BAG, *GAC* seront égaux. Donc l'arc *BC* est divisé en deux parties égales au point *G* (33. *liv.* 6).

61. *Remarque.* Si l'arc à diviser étoit très-petit comme *bc* [*fig.* 13], il vaudroit mieux, dans la pratique, y ajouter de part et d'autre des arcs égaux un peu grands, comme *bC*, *cC*, et diviser ensuite l'arc *BC* en deux parties égales au point *G*; l'arc *bc* se trouveroit ainsi divisé en deux parties égales.

62. Si au contraire l'arc à diviser étoit trop grand comme *PGQ*, il faudroit en retrancher de part et d'autre des arcs égaux *PB*, *QC*, afin de donner une grandeur moyenne à la moitié de l'arc *BC*, et ensuite diviser cet arc par le milieu au point *G*; l'arc *PGQ* se trouveroit ainsi divisé en deux parties égales.

63. On voit donc que tous les problêmes relatifs à la division de la circonférence, ou des arcs de cercle qu'on peut résoudre avec la règle et le compas, peuvent se résoudre aussi avec le compas seul.

GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE TROISIÈME.

DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES DISTANCES EN LIGNE DROITE.

PROBLÈME.

64. D*OUBLER la distance* AB.

Solution. Du centre *A*, et d'un rayon *AB*, décrivez [*fig.* 2] une demi-circonférence *B C D E*; c'est-à-dire, faites à *A B* = *B C* = *C D* = *D E* (10) : la ligne *B A E* sera droite et double de *A B*.

Démonstration. Voyez la 15.ᵉ du *liv.* 4.

PROBLÈME.

65. *Tripler, quadrupler, etc. une distance* A B.

Solution. Qu'on ajoute [*fig.* 1] à *A B* la droite égale *A E* (64); qu'on ajoute de la même manière la ligne égale *E V*, etc., la droite *BAEV* sera égale à 3 *A B* : en continuant de la même manière, on quadruplera, etc.

Démonstration. La ligne *B A E* est droite (15. *liv.* 4), ainsi que la ligne *A E V* : donc, etc.

PROBLÈME.

66. *Partager en deux parties égales la distance* A B, *c'est-à-dire*, *trouver le point* M *qui soit au milieu de la droite* A B.

Solution I.re Après avoir décrit [*fig.* 14] la demi-circonférence *B C D E* (64), du centre *E* et d'un rayon *EB*, soit décrit un arc indéfini *P B p*; du centre *B* et d'un rayon *B A*, soit encore décrite la demi-circonférence *pAPm*; ensuite, du centre *P* et du rayon *P B*, soit décrit l'arc *BM*, et qu'on fasse à $Pm = BM$; le point *M* sera le point cherché.

Démonstration. La ligne *B m* sera sur le prolongement de *B p* (15. *liv.* 4). Substituant les trois lignes égales *B P*, *Bp*, *B m* aux trois lignes égales *A p*, *p B*, *p S* du n.° 22, les trois lignes égales *P E*, *B E*, *p E* aux trois lignes *A Q*, *p Q*, *B Q*, et la ligne *P m* à la ligne *A S*; l'équation $AS.pQ = (Ap)^2$ (22) deviendra : $Pm.BE = (BP)^2$. Mais $BE = 2AB$, et $BP = AB$: donc $2AB.Pm$

$= (AB)^2$; et divisant par AB, on a $2Pm = AB = 2BM$. De plus, les triangles *BPM*, *BPm* ont leurs angles égaux (8. *liv.* 1) : donc *mP* est parallèle à *BM* (28. *liv.* 1). Mais les triangles *BPm*, *BPE* ont aussi les angles égaux (22) : donc *mP* est parallèle à *BE* (28. *liv.* 1) : donc les droites *BM*, *BE* se confondent.

Solution II. Du point *A* comme centre, et du rayon *AB* [*fig.* 15], soit décrite la demi-circonférence *BCDE* (64); des points *B* et *E* comme centres, et du même rayon *AB*, soient décrits les deux arcs indéfinis *CP*, *DQ*; des mêmes points *B* et *E* comme centres, et du rayon *BE*, soient décrits les deux arcs *EQ*, *BP*; du centre *P* et d'un rayon *PB* soit décrit l'arc *BM*; enfin qu'on décrive du point *E* comme centre, et d'un rayon *PQ* un arc qui coupe l'arc *BM* au point *M*; le point *M* sera le point cherché.

Démonstration. Après avoir fait les substitutions nécessaires dans la *fig.* 5 (23), on aura : $PQ \cdot BE = (BE)^2 - (BP)^2$. Mais $BE = 2AB$, $BP = AB$, $PQ = ME$. Donc $2ME \cdot AB = 4(AB)^2 - (AB)^2 = 3(AB)^2$: donc, divisant par AB, on aura $2ME = 3AB$. Mais à cause de l'égalité des côtés

opposés, $PQEM$ sera un parallélogramme qui, divisé en deux triangles équilatéraux par la diagonale QM, donne l'angle $PQM = QME$ (8. *liv.* 1) : d'où on voit que PQ est parallèle à ME (28. *liv.* 1), et PM parallèle à QE (33. *liv.* 1). De plus, on a PQ parallèle à BE (23) : donc ME, BE coïncident : donc, ayant $ME = MA + AE = MA + AB$, on aura : $2ME = 2MA + 2AB = 3AB$: d'où on tire $2MA = AB$.

Solution III. Du centre A et d'un rayon AB, soit décrite [*fig.* 16] la demi-circonférence $BCDE$ (64); du centre B et d'un rayon BE soit décrit l'arc indéfini PEp; du centre E et d'un rayon EC, qu'on décrive un arc qui coupe ce dernier aux points P et p; des centres P et p, et du même rayon PE, soient décrits deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); et en substituant dans l'équation (19) $pP.pQ = (Ap)^2$ les distances, c'est-à-dire les droites correspondantes de cette figure, on aura l'équation $EM.EB = (PE)^2$. D'où, à cause de $(PE)^2 = (EC)^2 = 3(AB)^2$ (12. *liv.* 13) (2), on aura : $2AB.EM$

$=3(AB)^2$; et divisant par AB, $2EM=3AB$, ou bien $2AE+2AM=3AB$: d'où, retranchant les quantités égales $2AE$, $2AB$, il reste $2AM=AB$.

Solution IV. La demi-circonférence $BCDE$ [*fig.* 17] étant décrite (64); du centre B et d'un rayon BD, soit décrit un arc indéfini aDp; du centre E et du même rayon BD, soit décrit un arc qui coupe celui aDp au point a. Puis du rayon Aa et du centre E, soit décrit un arc qui coupe cet arc aDp en P et p; enfin du même rayon Aa et des centres P et p, soient tracés deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); puis, faisant les substitutions nécessaires dans l'équation :

$$(AQ)^2=(Ap)^2+pQ\cdot PQ\ (18),$$

on aura : $(PB)^2=(PE)^2+EB\cdot MB$;
ou $(BD)^2=(Aa)^2+2AB\cdot MB$;
ou bien (12. *liv.* 13) (2) :

$$3(AB)^2=2(AB)^2\ [27]+2AB\cdot MB:$$

d'où, soustrayant $2(AB)^2$, $AB=2MB$.

On peut donner plusieurs autres solutions de ce problême, ou en employant de nouveaux rayons de cercle, ou en combinant entr'elles les solutions précédentes : mais je

crois inutile de les indiquer. En voici une assez simple, mais qui pourtant n'est pas très-exacte dans la pratique, parce que les arcs s'y coupent à angles trop aigus.

Solution V. Après avoir décrit [*fig.* 14], 1.° du centre *A* et d'un rayon *A B* la demi-circonférence *B C D E* (64); 2.° du centre *E* et d'un rayon *E B* l'arc indéfini *P B p*, qu'on décrive du centre *B* et d'un rayon *A B* un arc qui coupe l'arc *P B p* en *P* et *p*; soient encore décrits, des centres *P* et *p* et du même rayon *A B*, deux arcs qui se coupent en *M*, le point *M* sera le point cherché.

Démonstration. Le point *M* sera sur la droite *B E* (13); et comme à cause d'un angle à la base commun en *B* (5, 32. *liv.* 1. 4. *liv.* 6), les deux triangles isoscèles *P B M*, *P B E* sont semblables, on aura :

$$BE : BP :: BP : BM :$$

d'où (17. *liv.* 6) :

$$BE \cdot BM = (BP)^2 = (AB)^2,$$

ou $2\,AB \cdot BM = (AB)^2$;

et divisant par *A B* :

$$2\,BM = AB.$$

PROBLÊME.

67. *Continuer la sous-division en deux parties égales, avec une cons-*

truction plus simple, de AM *en* N, *de* AN *en* O, *etc. à l'infini.*

Solution I. Après avoir décrit [*fig.* 18] du rayon *A B* la demi-circonférence *B C D E* (64); du centre *B* avec le même rayon *A B*, l'arc indéfini *P' C A p'*; des centres *E* et *B* et du rayon *B E* les deux arcs *R' Q' P' B p' q' r'*, *P Q R E r q p*; et du centre *E*, du rayon *E C* l'arc *P C p*; si on décrit des centres *P'* et *p'* et du rayon *A B* deux arcs, ils se couperont en *M* au milieu de la droite *A B* [*solution* V (66)]. Si des centres *P* et *p* et du rayon *P E* on décrit deux arcs, ils se couperont aussi au même point *M* [*solution* III (66)]. Qu'on fasse maintenant à *A P'* = *B Q'* = *B q'* = *q' N* = *Q' N* (11), le point *N* sera au milieu de la droite *A M*. Qu'on fasse à *A Q'* = *B R'* = *B r'* = *r' O* = *R' O*. Le point *O* sera au milieu de la droite *A N*. En continuant ainsi, on diviseroit de la même manière *A O* en deux parties égales, etc. à l'infini.

Démonstration. Si on imagine une droite *P' A* qui divise en deux parties la base *B E* du triangle *P' B E* (12), on aura (26):
$(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2$
D'où, après avoir substitué les valeurs de

$BP' = AB$ et de $P'E = 2\,AB$; et soustrayant $2\,(AB)^2$, on aura $3\,(AB)^2 = 2\,(AP')^2$. D'où on tirera en divisant par 2, $(AP')^2 = (BQ')^2 = \frac{3}{2}\,(AB)^2$; et comme le point N est sur la droite BE (13), le triangle isoscèle $Q'BN$, à cause de l'angle commun en B (5 et 32. *liv.* 1, 4. *liv.* 6), sera semblable au triangle $Q'BE$. D'où $(BQ')^2 = BN \,.\, BE$ (17. *liv.* 6). Puis, comparant entr'elles les deux valeurs de $(BQ')^2$, on aura $\frac{3}{2}\,(AB)^2 = BN \,.\, BE = 2\,BN \,.\, AB$, et divisant par $2\,AB$, $\frac{3}{4}\,AB = BN$: donc $AN = \frac{1}{4}\,AB$.

De même on aura (26) :

$$(BQ')^2 + (Q'E)^2 = 2\,(AB)^2 + 2\,(AQ')^2.$$

D'où : $\frac{3}{2}\,(AB)^2 + 4\,(AB)^2 = 2\,(AB)^2 + 2\,(AQ)^2$;
et réduisant : $\frac{7}{4}\,(AB)^2 = (AQ')^2 = (BR')^2$.
Mais $(BR')^2 = BO \,.\, BE = 2\,AB \,.\, BO$;
Donc aussi : $\frac{7}{4}\,(AB)^2 = 2\,AB \,.\, BO$;
d'où : $\frac{7}{8}\,AB = BO$; et $AO = \frac{1}{8}\,AB$, etc.

Solution II. Qu'on fasse à $AP = EQ = Eq = qN = QN$, le point N sera au milieu de la droite AM.

Qu'on fasse à $AQ = ER = Er = rO = RO$, le point O sera au milieu de la droite AN. Continuant de la même manière, on partageroit en deux la droite AO, et ainsi de suite à l'infini.

Démonstration. En effet, on a (26) : $(PE)^2 + (PB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$; puis, substituant les valeurs de $(PE)^2 = (CE)^2 = 3(AB)^2$ (12. *liv.* 3) (2), et de $(PB)^2 = (BE)^2 = 4(AB)^2$, on aura : $7(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$. D'où ôtant $2(AB)^2$, et divisant par 2, on a : $\frac{5}{2}(AB)^2 = (AP)^2 = (EQ)^2$. Mais à cause des triangles isoscèles semblables EQN, EQB (13) (5, et 32. *liv.* 1. 4 et 17. *liv.* 6), $(EQ)^2 = EN.EB$. Donc, $\frac{5}{2}(AB)^2 = EN.EB = 2EN.AB$; et divisant par $2AB$, on a : $\frac{5}{4}AB = EN$, et $AN = \frac{1}{4}AB$.

En raisonnant de la même manière, on aura : $(QE)^2 + (QB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$; d'où : $\frac{5}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$: d'où aussi : $\frac{9}{4}(AB)^2 = (AQ)^2 = (ER)^2 = EO.EB = 2AB.EO$; et divisant par $2AB$, $\frac{9}{8}AB = EO$, et $AO = \frac{1}{8}AB$, etc.

Solution III. Du centre A et du rayon AB [*fig.* 19], soit décrite la demi-circonférence $BCDE$ (64) ; avec le même rayon AB et des centres B et E soient décrits les arcs indéfinis CP, Dp; des mêmes centres B et E et du rayon BE soient décrits les arcs $Epqr$, $BPQR$, on pourra trouver le point M, en faisant $PM = PB$, $EM = Pp$ [*Solu-*

tion II. (66)]. Actuellement, qu'on fasse à $AP = BQ = QN = Eq$; Qu'on fasse aussi à $Qq = EN$, le point N sera au milieu de la droite AM. Soit fait pareillement à $AQ = BR = RO = Er$, et à $Rr = EO$, le point O sera au milieu de la droite AN.

Démonstration. Après avoir fait dans la *fig.* 5 (23) les substitutions nécessaires, on aura : $Qq . BE = (BE)^2 - (BQ)^2$. Mais $BE = 2AB$, et $(BQ)^2 = \frac{3}{2}(AB)^2$ [*voyez la démonstration de la solution* I.] Donc $2Qq . AB = 4(AB)^2 - \frac{3}{2}(AB)^2$; puis, divisant par $2AB$, et réduisant, on a $Qq = \frac{5}{4}AB$. Donc aussi $EN = \frac{5}{4}AB$; donc la droite AB étant la même dans les deux *fig.* 18 et 19, les côtés des deux triangles $Q'NE$ [*fig.* 18], QNE [*fig.* 19], seront aussi les mêmes. D'où en superposant les trois points B, Q, E de la *fig.* 19, sur les trois points B, Q', E de la *fig.* 18, les points N des deux figures se confondront aussi. Donc, etc.

De même, faisant les substitutions nécessaires dans la figure 5 (23), on a : $Rr . BE = (BE)^2 - (BR)^2$. Mais $(BR)^2 = \frac{7}{4}(AB)^2$ [*démonstration de la solution* I]; donc $Rr . BE = (BE)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$; ou bien substituant $2AB$ à BE, on a $2AB . Rr = 4(AB)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$. Puis, divisant

par 2 AB, et réduisant : $Rr = \frac{9}{8} AB = OE$. Donc les points E, R, B de la fig. 19 coïncidant avec les points E, R', B de la fig. 18, et les lignes RO et EO y étant respectivement égales aux lignes $R'O$, EO de la fig. 18, le point O coïncidera aussi. D'où l'on voit que le point O se trouvera au milieu de la ligne AN. On démontreroit de même pour les autres divisions jusqu'à l'infini.

On pourroit employer d'autres moyens pour trouver les mêmes points : mais nous passerons à d'autres divisions de la ligne AB en un nombre différent de parties.

PROBLÊME.

68. *Diviser la distance* AB *en trois parties égales.*

Solution. Qu'on ajoute en ligne droite de part et d'autre à AB [*fig.* 20] les deux distances AE, BV qui lui sont égales (*64*); des centres E et V et du rayon EV soient décrits les deux arcs indéfinis QVq, PEp; des mêmes centres E et V et du rayon EB soient décrits deux autres arcs qui coupent les premiers en Q, q, et P, p; avec ce même rayon EB, et des centres P et p soient décrits deux arcs qui se coupent en T; enfin, avec

le même rayon, et des centres Q, q soient décrits deux arcs qui se coupent en t, la ligne AB sera divisée en trois parties égales aux deux points T et t.

Démonstration. Les points T, t seront dans la ligne droite VE (13); puis, à cause de l'angle commun en E (5 *et* 32. *liv.* 1. 4. *liv.* 6), le triangle isoscèle EPT sera semblable au triangle isoscèle EPV; donc $(PE)^2 = ET.EV$ (17. *liv.* 6). Substituant dans cette équation $2AB$ pour PE, et $3AB$ pour EV, elle deviendra $\frac{4}{3}AB = ET$; d'où $AT = \frac{1}{3}AB$. On démontreroit de même que Bt est un tiers de AB, et par conséquent aussi Tt.

PROBLÈME.

69. *Diviser une distance* AB *en un nombre quelconque de parties égales.*

Solution. Un exemple ou deux feront mieux sentir la règle générale.

Exemple I. Soit [*fig.* 21] la distance AB à diviser en cinq parties égales; qu'on lui ajoute en ligne droite les quatre distances AE, EF, FG, GH (65) qui lui sont égales, de manière qu'elle soit quintuplée en BH, c'est-à-dire, multipliée par autant d'unités qu'il

qu'il y en a dans le nombre qui indique en combien de parties on veut la diviser. Des extrémités *B* et *H* comme centres, et avec un rayon *A B* de la longueur de la distance qu'on veut diviser, qu'on décrive deux arcs indéfinis *A C*, *G I*; des mêmes centres *B* et *H*, et avec un rayon *B H*, soient décrits les deux arcs *H I*, *B C*; puis du centre *C* et du premier rayon *A B*, qu'on décrive un arc indéfini *B Q*; enfin, du centre *H* avec le rayon *C I*, qu'on décrive un arc qui coupe l'arc *B Q* en *Q*; la distance *B Q* sera sur la direction de la ligne *B A*, et en sera la cinquième partie.

Si on ajoute ainsi à *B Q* la droite égale *Q q* (64), et ensuite les autres lignes égales *q r*, *r s*, on aura déterminé toutes les cinquièmes parties de la droite *B A*.

Exemple II. Si on veut diviser la distance *A B* en sept parties égales [*fig.* 22], soit faite la ligne *B H* sept fois plus grande que *B A*; des extrémités de cette ligne, c'est-à-dire, des points *B* et *H*, et avec le rayon *A B*, soient décrits les arcs indéfinis *A C*, *G I*; des mêmes centres *B* et *H* et du rayon *B H*, soient décrits les deux arcs *H I*, *B C*; du centre *C* et du premier rayon *A B*, soit décrit un arc indéfini *B Q*; du centre *H* et du rayon *C I*, soit

décrit un arc qui coupe cet arc *B Q* en *Q*; *B Q* sera sur la direction de *B A*, et en sera la septième partie.

Démonstration. Les triangles *C Q I*, *I H Q* ayant leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle *C I Q* = *I Q H* (8. *liv.* 1); donc *C I* est parallèle à *H Q* (28. *liv.* 1). De plus, la ligne *C I* étant aussi parallèle à *B H* (23), le point *Q* sera sur la ligne *B H*. D'où on voit que les deux triangles isoscèles *C B Q*, *C B H* ayant un angle à la base commun en *B*, seront semblables (5, 32. *liv.* 1. 4. *liv.* 6); Ce qui donne *H B* : *B C* :: *B C* : *B Q*, ou bien *HB* : *A B* :: *A B* : *B Q*: donc la ligne *A B* sera autant de fois plus grande que *B Q*, que la droite *H B* sera de fois plus grande que *A B*.

Solution II. Si on veut diviser [*fig.* 23], la ligne *A B*, par exemple, en cinq parties égales, après avoir déterminé, comme dans la *solution* I, la ligne *B H* cinq fois plus grande que la ligne *A B*, soit décrit du centre *H* et du rayon *A B* un arc indéterminé *C B c*; maintenant, du centre *B* avec le rayon *B A*, qu'on décrive la demi-circonférence *c C K* (64); puis, du centre *C* avec le même rayon *A B* soit décrit l'arc *B Q*; enfin, du centre *B* et du rayon *C K*, qu'on décrive un arc qui

coupe cet arc $B\ Q$ en Q, la ligne $B\ Q$ sera la cinquième partie de la ligne $B\ A$ et sera placée dans la même direction.

Démonstration. La droite $B\ K$ sera sur le prolongement de la ligne $B\ C$ (15. *liv.* 4). Après avoir fait les substitutions nécessaires (22), on aura : $K\ C.\ B\ H = (B\ C)^2 = (A B)^2$; ce qui donne (17. *liv.* 6) : $B\ H : A\ B :: A\ B : K\ C$, ou bien $B\ H : A\ B :: A\ B : B\ Q$: donc la même ligne $A\ B$ sera d'autant plus grande que $B\ Q$, que $B\ H$ sera plus grande que $A\ B$; et quand on aura $B H = 5\ A\ B$, on aura aussi $A\ B = 5\ B\ Q$; ensuite les deux triangles $B K\ C$, $B\ C\ Q$ ayant tous leurs côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $K\ C B = C\ B\ Q$ (8. *liv.* 1). Mais l'angle $C\ B\ H$ est aussi égal à l'angle $K\ C\ B$ (22) : donc $B\ Q$ sera sur la direction de $B\ H$.

70. Il est clair que ce dernier problême (69) peut être très-utile dans la pratique pour diviser en lignes un pied déjà divisé en pouces, puisque $B\ H$ étant égale à douze pouces, BQ deviendra égale à la douzième partie du premier pouce $A\ B$, c'est-à-dire, à une ligne. On pourra de la même manière sous-diviser en centimètres le mètre déjà divisé en décimètres. Quand la droite $A\ B$, sur laquelle on

doit trouver le point *Q*, sera décrite, l'opération sera plus simple, puisque, sans décrire du centre *C*, et avec le rayon *A B* l'arc *B Q*, il suffira de couper en *Q* la droite donnée *A B* avec les ouvertures de compas précédemment indiquées.

GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE QUATRIÈME.

DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION DES DISTANCES ; DE LA SITUATION DES PERPENDICULAIRES ET DES PARALLÈLES.

71. Il est sans doute fort simple et très-facile d'ajouter à des distances données, ou d'en retrancher une autre distance avec la règle et le compas, en tirant une droite indéfinie par les deux extrémités de la première distance, et en y ajoutant, ou en en retranchant avec le compas la seconde distance (3. *liv.* 1) ; mais il n'est certainement pas aussi prompt, ni aussi aisé de le faire avec le compas seul : aussi ne donnerons-nous pas ici les problêmes suivans comme d'un grand usage, mais seulement pour faire voir qu'il n'y a aucun problême de la Géométrie élémentaire qu'on ne puisse aussi résoudre avec le compas seul dans le sens déjà expliqué (1), ce qu'on démontrera dans la suite plus rigoureusement ; et pour remplir la promesse que nous

avons faite (7) de n'omettre aucuns des élémens de cette nouvelle Géométrie.

PROBLÈME.

72. *De la distance* A B [fig. 24] *retrancher une distance égale à* C D.

Solution. Du centre *B* et du rayon *C D* (si c'est du côté de *B* qu'on veut retrancher la distance), décrivez la circonférence *F G E H*; du centre *A* et d'un rayon quelconque, soit décrit un arc qui la coupe en *E* et *F*, et divisez en deux parties égales au point *G* l'arc *E G F* (60), le point *G* sera sur la droite *B A*, et on aura pour reste la ligne *G A*.

Démonstration. Les triangles *EBG*, *FBG* ayant les côtés égaux, l'angle *E B G* sera égal à l'angle *F B G* (8. *liv.* 1): donc l'angle *E B G* sera égal à la moitié de l'angle *EBF*. Les triangles *EBA*, *FBA* ayant aussi les côtés égaux entr'eux, on prouvera de même que l'angle *E B A* est aussi la moitié de l'angle *E B F*. Donc l'angle *EB G* est égal à l'angle *E B A*: donc le point *G* est sur la droite *B A*. Mais *B G* est aussi égal à *C D*: donc en retranchant de *A B* la droite *C D*, on aura *G A* pour reste.

PROBLÊME.

73. *Ajouter à la ligne* AB *la distance* CD *en ligne droite.*

Solution. Du centre *B* (si c'est de ce côté qu'on veut ajouter la distance *C D*) et d'un rayon *C D*, soit décrit le cercle *F G E H*. Du centre *A* et d'un rayon quelconque, soit décrit un arc qui coupe le cercle en *E* et *F*; Qu'on divise en deux parties au point *H* l'arc *E H F* (60), le point *H* sera sur la droite *A B*, et *A H* sera la somme des deux distances *A B*, *C D*.

Demonstration. Les triangles *E B H*, *F B H* ayant les côtés respectivement égaux, ainsi que *EBA*, *F B A*, l'angle *E B H* sera égal à l'angle *FBH*, et l'angle *EBA* égal à l'angle *FBA*. Donc $EBH + EBA = FBH + FBA$. Mais la somme de ces quatre angles vaut quatre angles droits (13. *liv.* 1) : donc leur moitié (par exemple, $EBH + EBA$) vaudra deux angles droits : d'où on voit que la ligne *H B A* sera droite (14. *liv.* 1). De plus, $BH = CD$; donc $AH = AB + CD$.

PROBLÊME.

74. *Placer sur* AB *de* B *vers* A *la distance* CD *plus grande que* AB.

Solution. Du centre B et du rayon CD, soit décrit un arc indéfini $L\,M\,N$, ou un cercle entier ; du centre A et d'un rayon arbitraire soit décrit un arc qui coupe le premier aux points L et N ; qu'on divise l'arc $L\,N$ en deux parties égales au point M (60), la ligne $B\,M$ sera la ligne $C\,D$ placée où on vouloit qu'elle le fût.

Démonstration. Comme on a l'angle $L\,M\,A = N\,M\,A = \frac{1}{2}\,L\,M\,N$, et aussi $L\,M\,B = N\,M\,B = \frac{1}{2}\,L\,M\,N$, on trouvera, par le moyen des démonstrations des deux problêmes précédens, que l'angle $L\,M\,A = L\,M\,B$: d'où l'on voit que $B\,A\,M$ est droite : de plus, elle est égale à $C\,D$: donc, etc.

75. *Observation.* Si l'arc décrit du centre A coupoit à angles trop aigus l'arc décrit du centre B, ce qui arrive quand la ligne $A\,B$ est trop petite par rapport à $C\,D$, il faudroit ajouter à BA la ligne égale $A\,E$ en ligne droite, et couper avec un arc décrit du centre E en L et M l'arc $L\,M\,N$ décrit du centre B; si alors les angles des deux arcs sont encore trop aigus, il faut tripler, quadrupler, etc. (65), la ligne $B\,A$ de B vers A, jusqu'à ce que le point qui la termine, pris pour centre

du second arc, donne les angles d'intersection en *L* et *M* plus approchans de l'angle droit. On fera la même chose dans les cas semblables pour les n.os 72 et 73.

PROBLÊME.

76. *Etant donnés deux points* A *et* B, *trouver un point* H *tel que la droite* B H *soit perpendiculaire en* B *à la ligne* A B, *et égale à une ligne donnée* CD.

Solution. Du centre *B*, et avec la distance *C D* pour rayon, soit décrit un cercle *F E H G*; du centre *A*, et avec la distance *A B* pour rayon, soit décrit un arc qui coupe le cercle en *F* et *E*; qu'on détermine la demi-circonférence *F E G* (64), et qu'on divise en deux parties égales au point *H* l'arc *G E* (60), le point *H* sera le point cherché.

Démonstration. A cause de la similitude des triangles *GEB*, *E B A* (22), on aura l'angle *G E B* = *E B A* : d'où on voit que *G E* est parallèle à *B A* (28. *liv.* 1). Mais *B H* qui divise l'angle *G B E* en deux parties égales, est perpendiculaire à la corde *G E* (9. 11. 12. *liv.* 1), et par conséquent aussi à *BA* (28. *liv.* 1). Or on a de plus *B H* = *CD*; donc *H* est le point cherché.

Si la ligne *A B* étoit plus petite que *C D*, il faudroit doubler, tripler, etc. (64, 65).

PROBLÈME.

77. *Etant donnés deux points* A *et* B, *trouver un point* D, *tel que* DA *soit perpendiculaire à* AB.

Solution. Des centres *A* et *B*, et d'un rayon (*A B*, par exemple) pris arbitrairement, soient décrits deux arcs qui se coupent en *C*; avec le même rayon et du centre *C*, soit décrite la demi-circonférence *B A D* (64), le point *D* sera le point cherché.

Démonstration. L'angle *DAB* est inscrit et appuyé sur le diamètre : donc il est droit (31. *liv.* 3).

PROBLÈME.

78. *Etant données les deux extrémités d'une droite* A B, *et un point* D *pris hors de cette ligne, trouver* [fig. 28] *un autre point* E *qui détermine la position de la droite* DE *perpendiculaire à* A B, *et le point* M *où elle la coupe.*

Solution. Soit fait à $AD = AE$, à *BD*

$=BE$ (11), le point E sera le premier point cherché. Soit divisée la ligne DE en deux parties égales au point M, le point M sera le second point.

Démonstration. Elle se trouve au n.º 14.

PROBLÈME.

79. *Trouver deux points d'une droite qui soit perpendiculaire au milieu de* DE [fig. 28].

Solution. Soit fait à un rayon quelconque pris arbitrairement $=DA=EA$; soit fait de l'autre côté au même rayon, ou à tout autre pris arbitrairement, $=DB=EB$, les points A et B seront les deux points cherchés.

Démonstration. Elle se trouve au n.º 14.

PROBLÈME.

80. *Etant donnés deux points* A *et* B *d'une ligne droite, et un point* C *pris hors de cette ligne, par lequel on veut mener une parallèle à* A B, *trouver un autre point* D *qui en détermine la position.*

Solution. Soit fait à $CA=BD$ (11), et

à $BA = CD$, le point D sera le point cherché.

Démonstration. Dans les deux triangles CDB, CAB, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, l'angle DCB est égal à l'angle CBA (8. *liv.* 1) : donc CD est parallèle à AB (28. *liv.* 1).

PROBLÊME.

81. *Etant donnés* [fig. 30] *deux point* A *et* B *d'une ligne droite, et un point* C *pris hors de cette ligne, porter à ce point* C *une distance* CB; *de manière que la droite* CE *soit parallèle à* AB, *et égale à une ligne donnée* MN.

Solution. Ayant trouvé un point D de la ligne parallèle qui passe par le point C (80), sur la direction de la ligne CD, placez la droite MN, en la soustrayant, si elle est plus petite (72), ou en l'ajoutant de l'autre côté (73), ou en la plaçant sur CD de C vers D, si elle est plus grande (74), suivant que l'exigeront les conditions du problême.

Cette solution n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME.

82. *Vérifier* [fig. 31] *si les points* A, B, C *sont en ligne droite.*

Solution. Des centres *A* et *C*, et d'un rayon (*A C*, par exemple) pris arbitrairement, soient décrits deux arcs qui se coupent en *D* et *E*; puis qu'on observe si *DB* = *EB*; si cela est, les trois points *A*, *B*, *C* sont en ligne droite; sinon ils n'y sont pas.

Démonstration. Si on a encore *DB* = *EB*, on aura l'angle *DAB* = *EAB* = $\frac{1}{2}$ *DAE* (8. *liv.* 1), car les deux triangles *DAB*, *ABE* ont les côtés égaux chacun à chacun. Mais par la même raison, dans les triangles *DAC*, *EAC*, les angles *DAC*, *EAC* sont égaux, et par conséquent chacun d'eux est égal à la moitié de l'angle *DAE* : donc on aura *DAB* = *DAC*; d'où on voit que les trois points *A*, *B*, *C* sont en ligne droite.

Mais si la ligne *DB* est plus grande ou plus petite que *EB*, l'angle *DAB* sera ou plus grand ou plus petit que l'angle *EAB* (25. *liv.* 1); il ne pourra donc pas être égal à l'angle *DAC*, puisqu'il ne sauroit être égal à la moitié de l'angle *DAE* : donc les trois points *A*, *B*, *C* ne pourront être en ligne droite.

PROBLÈME.

83. *Etant donnés trois points* A, B, D [fig. 32], *vérifier si la ligne* DA *est perpendiculaire à* AB.

Solution. Soit doublée la ligne *AB* en *BE* (64) par le moyen du demi - cercle *BPQE;* qu'on observe si on a *DB*=*DE;* si cela est, l'angle *DAB* est droit ; autrement il ne l'est pas.

Démonstration. La droite *BAE* étant le diamètre du cercle, fera avec *DA* deux angles, dont la somme vaudra deux angles droits (13. liv. 1). De plus, dans les deux triangles *DAE, DAB*, qui ont les côtés *AE, AB* égaux, et le côté *AD* commun, quand on aura le côté *DE* égal au côté *DB*, l'angle *DAE* sera aussi égal à l'angle *DAB* (8. *liv.* 1), et par conséquent ils seront tous deux droits. Mais quand *DE* sera plus grande ou plus petite que *DB*, l'angle *DAE* sera aussi plus grand ou plus petit que *DAB* : donc l'un sera aigu et l'autre obtus (25. *liv.* 1).

PROBLÈME.

84. *Vérifier si la droite, qui passe*

par deux points donnés D, F [fig. 33], *est perpendiculaire à celle qui passe par deux autres points donnés* A, B.

Solution. Trouvez par le moyen du point *D* la droite *DE* perpendiculaire à *AB* (78), et voyez si les trois points *D*, *E*, *F* sont en ligne droite (82); s'ils y sont, la ligne *DF* est perpendiculaire à *AB*; sinon elle ne l'est pas.

Démonstration. En effet, *DE* est perpendiculaire par construction; si *DF* l'est aussi, ce sera la même droite, puisque d'un point *D* à une droite *AB*, on ne peut mener deux perpendiculaires (*coroll. prop.* 32. *liv.* 1).

PROBLÈME.

85. *Etant donnés* [fig. 34] *deux points* A, B *d'une droite, et deux points* C, D *d'une autre, vérifier si ces deux lignes sont parallèles.*

Solution. Soit fait à $AD = AE$, à $BD = BE$ (11), et de même à $AC = AF$ et à $BC = BF$, on observera si $DE = CF$; dans ce cas, les deux lignes seront parallèles; sinon elles convergeront du côté de la plus petite.

Démonstration. Les lignes *D E*, *C F* sont perpendiculaires à *A B*, et sont coupées par moitié aux deux points *M* et *N* (14) : donc elles sont respectivement doubles des distances *D N*, *C N* des points *D* et *C* de la droite *A B* : donc, quand ces lignes seront égales, les distances le seront aussi, et par conséquent les lignes *A B*, *D C* seront parallèles ; autrement elles convergeront.

GÉOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE CINQUIÈME.

DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

PROBLÈME.

86. *TROUVER une troisième proportionnelle à deux distances* Qp, MN (fig. 35), *dont la première* Qp *est plus grande que la seconde* MN.

Solution. Du centre *Q* et d'un rayon *Qp*, soit décrit un arc indéfini *A p B*; du centre *p* et d'un rayon *MN* soit décrite la demi-circonférence *B A S*; la ligne *A S* sera la troisième proportionnelle demandée.

Démonstration. Par le lemme du n.° 22, on aura : $AS.pQ = (Ap)^2$. Donc $AS.pQ = (MN)^2$, donc (17. *liv.* 6):

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

PROBLÈME.

87. *Trouver une troisième propor-*

tionnelle à deux distances Q p, M N (fig. 36), *dont la première est plus petite que la seconde, mais pourtant plus grande que la moitié de cette ligne.*

Observation. Nous serons assurés que la ligne *Q p* est plus grande que la moitié de *M N*, si les deux cercles décrits des centres *Q* et *p*, qui sont les extrémités de la première distance et des rayons *Q p* et *M N*, qui sont les deux distances données, se coupent comme dans la figure.

Solution. C'est la même que la précédente, appliquée à la figure 36.

Démonstration. Elle est la même que la précédente.

88. Si le cercle *p b Q'* [*fig.* 37], décrit du centre *Q* et du rayon *Q p* n'avoit aucun point d'intersection avec le cercle décrit du centre *p* et du rayon *M N* comme dans la figure 37, on se serviroit du problême suivant.

PROBLÊME.

89. *Trouver* (fig. 37) *une troisième proportionnelle à deux distances* Q p, M N, *dont la première est plus petite que la moitié de la seconde.*

Solution. Du centre p et du rayon MN, soit décrit un arc indéfini BAS; du centre Q et du rayon Qp soit décrite la demi-circonférence pbQ' (64); du centre Q' et du rayon $Q'p$ soit décrit un arc indéfini; si cet arc coupe l'arc BAS en deux points B et A, qu'on détermine la demi-circonférence BAS' (64); et qu'on ajoute en ligne droite à AS' (64) une droite égale $S'S$; la ligne AS sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. On a [22]:

$$AS' . pQ' = (Ap)^2 = (MN)^2.$$

Mais $pQ' = 2pQ$. Donc $2AS'.pQ = (MN)^2$; ou bien $AS.pQ = (MN)^2$, d'où (17. *liv.* 1):

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

90. Si cependant l'arc pcQ'' [*fig.* 38.] décrit du centre Q' et du rayon $Q'p$ coupoit l'arc BAS décrit du centre p et du rayon MN, déterminez la demi-circonférence pCQ'', et décrivez du centre Q'' et du rayon $Q''p$ un arc indéfini; s'il coupe l'arc BAS aux deux points A et B, déterminez la demi-circonférence BAS' (64); quadruplez AS' (65), et faites $AS = 4AS'$. Cette ligne sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. En effet, on a (22): $AS' . pQ'' = (Ap)^2 = (MN)^2$, et $4AS'.pQ$

$= (MN)^2 = AS \,.\, pQ.$
D'où (17. *liv.* 6) :

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

91. On procéderoit de la même manière, quand même la distance $Q''p$ seroit plus grande que la moitié de MN; c'est-à-dire, on prendroit une distance double de cette ligne, et huit fois plus grande que Qp, et on octupleroit la ligne AS', que l'on vient de déterminer. Cette distance octuple de AS' seroit la troisième proportionnelle cherchée, et ainsi de suite.

La démonstration est la même que celle qui précède.

92. Dans le cas encore où la première distance Qp seroit un peu plus grande que la moitié de la seconde MN, il faudroit doubler cette distance, afin que les intersections des des deux cercles se fassent à angles moins aigus et plus approchans de l'angle droit (9).

PROBLÊME.

93. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois distances* PQ, RS, TV, (fig. 32).

Solution. D'un même centre O, et avec les deux premières distances PQ et RS, prises pour rayon, décrivez les deux cercles BC, DE;

d'un rayon égal à la troisième distance *T V*, et d'un point quelconque *B* de la première circonférence, décrivez un arc de cercle qui la coupe en *C*; du même point *B*, et avec un rayon arbitraire, décrivez un arc de cercle qui coupe la seconde circonférence en *D*; du même rayon *B D*, et du centre *C* coupez la même circonférence en *E*; joignez les deux points par la droite *D E*; elle sera la quatrième proportionnelle cherchée.

Démonstration. Les triangles *COE*, *BOD*, ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $COE = BOD$ (8. *liv.* 1); retranchant l'angle commun *BOE* (ou l'ajoutant), on aura $COB = EOD$. Donc $OCB + OBC = OED + ODE$ (32. *liv.* 1). Mais les deux triangles *C O B*, *E O D* sont isoscèles : donc les demi-sommes, c'est-à-dire, les angles à la base, sont égaux. Donc ces deux triangles sont semblables, et on a : $CO : DO :: CB : DE$; ou bien $PQ : RS :: TV : DE$.

94. *Observation* I. Il conviendra de prendre le rayon arbitraire *B D*, tel que l'angle *B D O* soit à-peu-près droit (9) : ce qui peut se faire à vue-d'œil.

95. *Observation.* II. Si la troisième distance *T V* ne peut pas être placée comme corde sur *B C*, ce qui arrivera lorsque *T V* sera plus

grande que deux fois la ligne $P\,Q$, il faudra doubler les deux distances $P\,Q$, $R\,S$ (64), et avec ces deux distances ainsi doublées, décrire les deux cercles $B\,C$, $D\,E$, et achever la construction comme ci-dessus (93). Si cela ne suffisoit pas, on les tripleroit, etc. quand même $T\,V$ pourroit s'appliquer comme corde au premier cercle; si elle est presque égale au diamètre de ce cercle, il faudra doubler ou tripler ces distances pour éviter les sections à angles aigus, et en obtenir d'autres plus approchantes de l'angle droit.

La démonstration est fondée sur la proportion suivante :

$PQ : RS :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS ::$, etc.

Donc, lorsqu'on aura fait :

$BC : DE :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS ::$, etc.

ce qui suit de la construction, on aura aussi :

$$P\,Q : R\,S :: B\,C : D\,E;$$

ou $P\,Q : R\,S :: T\,V : D\,E$ (4. *liv.* 5).

PROBLÈME.

96. *Diviser la droite* MN *en* P *en parties proportionnelles à deux distances données* PQ, RS.

Solution. Portez sur le prolongement de $P\,Q$, la droite $Q\,V = R\,S$ (73); cherchez une quatrième proportionnelle aux trois

droites PV, MN, PQ [93] : portez-la sur la ligne MN en MP, en la soustrayant de MN (72); le point P où elle tombera sera le point cherché.

Démonstration. On a par construction :

$$PV : MN :: PQ : MP;$$

on aura donc aussi (5. *liv.* 5) :

$$PV : MN :: QV : PN.$$

D'où :

$$PQ : MP :: QV : PN;$$

ou bien $PQ : QV :: MP : PN$;
et en mettant pour QV sa valeur :

$$PQ : RS :: MP : PN.$$

PROBLÊME.

97. *Diviser la droite* AB (fig. 41) *en moyenne et extrême raison.*

Solution. Du centre A et du rayon AB, décrivez le cercle BDd; soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; faites à $BD = Ba = Ea$; faites à $Aa = Eb = db$; la droite AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point b, et on aura : $BA : Ab :: Ab : bB$.

Démonstration. Voyez le n.º 46.

98. Ce dernier problême est encore un de ceux que l'on résout au moyen du compas

seul, plus simplement qu'avec la règle et le compas réunis. On peut s'en convaincre, en comparant cette solution avec celles données dans les traités ordinaires de Géométrie. Cependant la démonstration en est plus compliquée.

PROBLÊME.

99. *Trouver une moyenne proportionnelle entre les distances données* AB *et* CD (fig. 42).

Solution. Sur la droite *A B*, portez *C D* de *B* en *H* (73); divisez *A H* en deux parties égales au point *F* (66); prolongez la ligne *BF* de la partie égale *B f* (64); des points *F* et *f* pris pour centre et avec un rayon égal à *A F*, décrivez deux cercles qui se coupent au point *M*, *B M* sera la moyenne proportionnelle demandée.

Démonstration. Les points *f*, *B*, *F* étant sur la même droite *H A*, et les triangles *MBf*, *MBF* ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle *M BF*=*MBf* (8. *liv.* 1), et par conséquent chacun de ces angles sera droit (13 *liv.* 1); donc *M B* sera perpendiculaire sur le diamètre du demi-cercle *H M A*. De-là on a (13 *liv.* 6) : *A B* : *B M* :: *B M* : *B H*; ou bien : *A B* : *B M* :: *B M* : *C D*.

GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE SIXIÈME.

DES RACINES.

PROBLÊME.

100. *TROUVER facilement les racines des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix, en prenant pour unité la distance* AB (fig. 43).

Solution. Du rayon *A B*, décrivez le cercle *BDd*; faites à *AB*=*BC*=*CD*=*DE*=*Ed*=*dc*; des points *B* et *E* pris pour centre, et du rayon *B D*, décrivez les arcs de cercle qui se coupent en *a* et *α*; du même rayon *B D* et des centres *D* et *d*, décrivez des arcs de cercles qui se coupent au point *V*. Du rayon *A a*, et du centre *B*, coupez la circonférence au point *F*; des centres *R* et *F* et du rayon *A B*, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent au point *T*; on aura :

$AB = \sqrt{1}$	$aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$.

Démonstration. On a prouvé [27], que $(Aa)^2 = 2$; donc $Aa = \sqrt{2}$. On sait aussi [2] que $BD = \sqrt{3}$; on a ensuite $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Les triangles BTA, TAF, ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $BTA = TAF$ (8. *liv.* 1), et par conséquent BT parallèle à FA (28. *liv.* 1) : donc BT sera perpendiculaire sur BA, de même que FA [27] (27 *liv.* 1) : de plus, les points A et E étant à la même distance des points D et d, ainsi que les points B et V, les quatre points B, A, E, V, seront dans la même droite [13], et on aura $EV = BA$ [14]. On aura donc :

$$(ET)^2 = (TB)^2 + (BE)^2 \text{ (47. liv. 1)}$$
$$= (AB)^2 + 4(AB)^2 = 5.$$

d'où : $ET = \sqrt{5}$.

De même $(aV)^2 = (Aa)^2 + (AV)^2$.

et comme $EV = BA$, on aura :

$$AV = BE = 2AB;$$

d'où : $(AV)^2 = 4(AB)^2 = 4$.

On a de plus $(Aa)^2 = 2$ [27]; donc $(aV)^2 = 6$, et $aV = \sqrt{6}$. Comparant ensuite les points C, B, c, A, V avec les points A, p, B, P, Q de la figure 3, et substituant dans l'équation :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ \; [18];$$

on aura :

$$(CV)^2 = (CB)^2 + BV \cdot AV = 1 + 3 \cdot 2 = 7.$$

d'où : $CV = \sqrt{7}$; et comme $Aa = A\alpha$ [14], on aura :

$$(a\alpha)^2 = 4(Aa)^2 = 8.$$

d'où : $a\alpha = \sqrt{8}$. On a ensuite $BV = 3 = \sqrt{9}$. Enfin on a :

$$(TV)^2 = (TB)^2 + (BV)^2 = 1 + 9 = 10;$$

donc $TV = \sqrt{10}$.

PROBLÈME.

101. *Par le moyen des racines trouvées dans le problême précédent, trouver* (fig. 44) *les autres racines des nombres entiers, depuis 10 jusqu'à 36.*

Solution. Soit soustrait le nombre dont on veut avoir la racine du nombre quarré immédiatement plus grand, qui sera, ou 16, ou 25, ou 36; avec la racine du reste que l'on trouvera [100], prise pour rayon, et du centre A, soit décrite la demi-circonfé-

rence QLR [64]; avec la racine du nombre quarré immédiatement plus grand, prise pour rayon (on la trouvera par la méthode du n.° 65), et des centres Q et R, soient décrits deux arcs qui se coupent en P; la ligne AP sera la racine cherchée.

Par exemple, si on veut la racine de 29, on aura $36-29=7$; du rayon $CV=\sqrt{7}$ [100], après avoir décrit la demi-circonférence QLR, soient des centres Q et R, et d'un rayon $=6$, tracés deux arcs qui se coupent en P, on aura $AP=\sqrt{29}$.

Démonstration. L'angle PAQ étant droit [83], on aura :

$(PQ)^2=(AQ)^2+(AP)^2$ (47. *liv.* 1) :

d'où :

$$(PQ)^2-(AQ)^2=(AP)^2.$$

Maintenant supposant $(PQ)^2=36$, et égalant successivement $(AQ)^2$ aux nombres entiers compris depuis 1 jusqu'à 10, $(AP)^2$ sera successivement égal aux quarrés compris depuis 36 jusqu'à 25. Donc on aura successivement pour AP les racines de tous ces nombres. Mais la racine de 25 est 5 [65] : donc supposant $(PQ)^2=25$, on aura de la même manière les racines depuis 25 jusqu'à 16; et faisant $(PQ)^2=16$, on aura les autres racines depuis 16 jusqu'à 10.

Dans l'exemple que nous avons pris, on aura : $(PQ)^2 - (AQ)^2 = 36 - 7 = (AP)^2 = 29$: d'où $AP = \sqrt{29}$.

PROBLÈME.

102. *Trouver les racines de tous les nombres entiers.*

Solution. Il est clair qu'en employant la même méthode (101), on peut, avec les racines que l'on a déjà trouvées, avoir les autres racines des nombres supérieurs, et avec celles-ci continuer ainsi à l'infini. Nous avons donc déjà le moyen d'obtenir les racines de tous les nombres entiers.

PROBLÈME.

103. *Trouver la racine d'un nombre fractionnaire quelconque.*

Solution. Trouvez la racine du dénominateur (102), puis celle du numérateur, et faites cette proportion :

La première racine est à la seconde, comme l'unité est à une quatrième proportionnelle (93) ; ce quatrième terme sera la racine cherchée.

Démonstration. Soit en effet d le dénominateur, et n le numérateur ; si on fait cette proportion :

$\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1 :$ à une 4.e proportionnelle $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$. Mais $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$: donc, etc.

PROBLÊME.

104. *Trouver facilement* (fig. 45) *la moitié des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 25.*

Solution. Du rayon $AB = 1$, et du centre A, soit décrit le cercle BDd, et dans sa circonférence soit fait à $AB = BC = CD = DE = Ed$.

Du centre B et du rayon BD, soit décrit un arc qui passe par les points a, N, D, d, n, α.

Du même rayon et du centre E, soit décrit un arc qui passe par les points a, M, C, m, α.

Du rayon Aa et du centre B, soit décrit un arc qui passe par les points M, F, Q, q, m.

Du même rayon et du centre E, soit décrit un arc qui passe par les points N, F, P, p, n.

Du rayon AB et du centre B, soit décrit un arc qui passe par les points P et p.

Du même rayon et du centre E, soit décrit un arc qui passe par Q et q.

Du même rayon et du centre P, soit décrit un arc qui passe par R, et coupe la circonférence en S; du centre p, soit décrit un autre arc qui coupe le premier en R, et la circonférence en s.

Du même rayon et des centres Q et q, soient décrits deux arcs qui se coupent en T, et coupent la circonférence en O et o.

Du même rayon et du centre a, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en g; du centre R, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en L et l; des centres O et o, soient décrits deux arcs, qui se coupent en H; des centres H et T, soient décrits deux arcs qui se coupent en V et v.

on aura :

$RA = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$
$RQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
$RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$
$RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$BE = \frac{1}{2}\sqrt{16}$
$RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$
$AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$
$Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}$	$HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$
$Aa = \frac{1}{2}\sqrt{8}$	$ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}$
$BR = \frac{1}{2}\sqrt{9}$	$dV = \frac{1}{2}\sqrt{21}$
$BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}$	$HS = \frac{1}{2}\sqrt{22}$
$pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$	$Mm = \frac{1}{2}\sqrt{23}$
$BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$	$Mn = \frac{1}{2}\sqrt{24}$
	$HE = \frac{1}{2}\sqrt{25}$.

Démonstration. Si on compare les points P, B, p, R, E de cette figure avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3 par le moyen de l'équation du n.° 18 :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ\,;$$

on aura pour cette figure :

$$(PE)^2 = (PB)^2 + BE \cdot RE\,;$$

ou :

$$(Aa)^2 = (AB)^2 + 2AB \cdot RE\,;$$

ou bien (27) :

$$2 = 1 + 2RE\,;$$

d'où on tire $RE = \frac{1}{2}AE$;

et puisque le point R est sur la même droite BAE [13], on aura aussi :

$$RA = \tfrac{1}{2}AE = \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1}.$$

Le point T étant au milieu de AB, par la même raison que le point R est au milieu de AE, ce qu'on a démontré, on aura $AT = RE$; d'où on voit, en comparant les points Q, T, q, E, R de cette fig. 45, avec les points A, q, B, Q, P de la fig. 3, le point A de la fig. 45 sera le point p de la fig. 3. Donc de l'équation du n.° 16 :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$$

on tirera pour cette fig. 45, l'équation :

$$(QE)^2 = (RQ)^2 + (RE)^2 + AR \cdot RE\,;$$

et substituant les valeurs numériques :

$$1 = (RQ)^2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\,;$$

d'où

d'où on tire :

$$(RQ)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 ; RQ = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Comparant les points D, A, d, E de la fig. 45, avec les points P, A, p, B de la fig. 3, il restera démontré (14) que les deux droites AE, Dd se coupent réciproquement en deux parties égales. Mais AE est coupée en deux parties égales au point R : donc Dd l'est aussi. Mais $Dd = BD = \sqrt{3}$ [2] : donc $RD = \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Qu'on se rappelle que DRd est aussi perpendiculaire à AE (14). On a ensuite $RP = 1$: donc $RP = \frac{1}{2} \sqrt{4}$.

L'angle FAR étant droit (27), on a :

$$(RF)^2 = (FA)^2 + (AR)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} ;$$

donc : $RF = \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

La base BAE du triangle BME étant coupée au milieu par la droite AM, on aura (26) :

$$(BM)^2 + (EM)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2 ;$$

c'est-à-dire,

$$(Aa)^2 + (BD)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2 ;$$

ou bien :

$$2 + 3 = 2 + 2(AM)^2 ;$$

d'où : $6 = 4(AM)^2$, $\sqrt{6} = 2AM$, $AM = \frac{1}{2} \sqrt{6}$.

De la comparaison que l'on vient de faire des points Q, T, q, E, R, A, de la figure 45, avec les points $A, q, B, Q. P, p$ de la fig. 3,

il résulte (13) qu'on a dans la figure 45, *A Q* $=$ *A q* $=$ *Q R* $=$ *R q*. On verra par les mêmes raisons que les droites *A P*, *A p*, *P T*, *T p* sont égales entr'elles, et aux quatre lignes *AQ*, *A q*, *Q R*, *R q*. Donc les deux triangles isoscèles *P T A*, *Q A R* ayant tous les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle *P A T* $=$ *Q R A* (8. *liv.* 1); et comme la ligne *T A R* est droite, *P A* sera parallèle à *Q R* (29. *liv.* 1); d'où on voit aussi que *P Q* est égale et parallèle à *A R* (33. *liv.* 1).

Mais *Q q* est perpendiculaire à *A R* (14); donc elle l'est aussi à *P Q* (27. *liv.* 1). Ensuite dans les triangles *P A T*, *R A q*, les deux angles *PA T*, *R A q* seront égaux (8. *liv.* 1), et la ligne *T A R* sera droite. Donc les deux angles *P A T*, *P A R* étant égaux à deux angles droits, (13. *liv.* 1), les deux angles *P A R*, *R A q* le seront aussi. D'où la ligne *P A q* sera droite aussi (14. *liv.* 1). Donc :

$(P q)^2 = (2 R Q)^2 = (P Q)^2 + (Q q)^2$ (47. *liv.* 1);

c'est-à-dire, $2 = \frac{1}{4} + (Q q)^2$;

d'où : $\frac{7}{4} = (Q q)^2$ et $Q q = \frac{1}{2} \sqrt{7}$.

Puis on a $(A a)^2 = 2[27] = \frac{8}{4}$:

d'où $A a = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{8}$.

On a aussi $B R = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{9}$.

Si on compare les points B, L, R, l, A de la figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation :

$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp . PQ$ (16)

on tirera pour la fig. 45 l'équation :

$(BL)^2 = (LA)^2 + (AB)^2 + AR . AB$;

ou bien $(BL)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{4}$:

d'où $BL = \frac{1}{2} \sqrt{10}$.

Les deux triangles PSA, PBA ont les angles respectivement égaux. Donc on a l'angle $SPA = PAB$ (8. *liv.* 1); d'où les lignes PS, BA sont parallèles (28. *liv.* 1). Mais Pp coupe BR à angles droits (14). Donc elle sera aussi perpendiculaire à PS (27. *liv.* 1). On démontrera ensuite que $(Pp)^2 = \frac{7}{4}$ de la même manière que l'on a démontré que $(Qq)^2 = \frac{7}{4}$. D'où, à cause de

$(pS)^2 = (Pp)^2 + (PS)^2$ (47. *liv.* 1);

on aura $(pS)^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$;

d'où $pS = \frac{1}{2} \sqrt{11}$.

On a ensuite $(BD)^2 = 3 [2] = \frac{12}{4}$;

d'où $BD = \frac{1}{2} \sqrt{12}$.

On a aussi : $(HF)^2 = (HA)^2 + (AF)^2$;

et en démontrant que QO est parallèle à BE, de la même manière qu'on l'a fait pour PS, les points O, P, Q, S seront dans la même droite; et :

$PO = QO - PQ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = PQ$.

Donc OP étant égale et parallèle à TA et à TB, les lignes OT, PA seront aussi égales et parallèles, ainsi que les lignes OB, PT (33. *liv.* 1). Mais on a démontré plus haut que $PT = PA$. Donc OT, OB seront aussi égales à ces lignes. Par la même raison, les lignes oT, oB de l'autre côté seront égales à $pA = PA$. Si maintenant on compare les points O, o, A, T, B, H avec les points A, B, Q, P, p, q de la figure 3, on tirera [14] :
$HB = AT = \frac{1}{2}$.
On aura donc $(HA)^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$;
d'où $(HF)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$,
et $HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Si on compare les points E, O, H, o, A avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp.PQ$$

[16], on tirera pour la fig. 45 :

$$(EO)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 + HA.AE.$$
$$= 1 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4}:$$

d'où, $EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

Ensuite si on compare les points A, R, L, Q, q, l de la figure 45, avec les points A, B, Q, P, p, q de la figure 3, on a [15] pour la figure 3, l'équation : $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$; et multipliant par 4,

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2,$$

où : $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$,
on tirera pour la figure 45 :
$(Ll)^2 = 4(AL)^2 - 4(AR)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.
d'où résulte : $Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$.
On a ensuite : $BE = 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}\sqrt{16}$.

A cause de l'angle droit aAH (27), on a :
$(Ha)^2 = (HA)^2 + (Aa)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{17}{4}$:
d'où $Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

Démontrant que $(AN)^2 = \frac{3}{2}$ de la même manière qu'on l'a fait pour $(AM)^2$, et aussi que $(An)^2 = \frac{3}{2}$; et parce que NR coupe par moitié la base AE du triangle ANE, on aura (26) :
$(AN)^2 + (NE)^2 = 2(AR)^2 + 2(RN)^2$;
c'est-à-dire, $\frac{3}{2} + 2 = \frac{2}{4} + 2(RN)^2$;
et réduisant, on trouve : $(RN)^2 = \frac{3}{2} = (AN)^2$.
De même on trouve $(Rn)^2 = \frac{3}{2}$. Si maintenant on compare les points H, N, R, n, A de la figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$$

[16], on tirera pour la figure 45 l'équation :
$(HN)^2 = (AN)^2 + (AH)^2 + AR \cdot AH$;
c'est-à-dire, $(HN)^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$:
d'où résulte $HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$.

La ligne DR étant perpendiculaire à AE, c'est-à-dire, à HR, on aura :
$(HD)^2 = (HR)^2 + (RD)^2$ (47. *liv.* 1)
$= 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$;

d'où $HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$.

La base $a\,A\,\alpha$ du triangle $a\,g\,\alpha$ étant coupée au milieu par la droite $g\,A$, on aura (26):

$$(a\,g)^2 + (\alpha\,g)^2 = 2\,(A\,a)^2 + 2\,(A\,g)^2,$$

ou $(a\,g)^2 + 1 = 4 + 2$; et $(a\,g)^2 = 5 = \frac{20}{4}$; d'où $a\,g = \frac{1}{2}\sqrt{20}$.

Les deux triangles $H\,T\,V$, $A\,E\,D$ ayant les côtés égaux entr'eux, l'angle $V\,T\,H = D\,E\,A$ (8. *liv.* 1), et les points H, T, A, E étant sur la même droite, $V\,T$ sera parallèle à son égale $D\,E$ (29. *liv.* 1) : d'où $V\,D$ est aussi parallèle et égale à $T\,E$ (33. *liv.* 1). Mais $D\,d$ est perpendiculaire à $A\,E$, c'est-à-dire, à $T\,E$; donc elle l'est aussi à $V\,D$ (27. *liv.* 1); d'où $(d\,V)^2 = (V\,D)^2 + (D\,d)^2 = (T\,E)^2 + (BD)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 3\,.\,[2] = \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4}$: d'où $d\,V = \frac{1}{2}\sqrt{21}$.

Ayant démontré $P\,S$ égale et parallèle à $A\,E$, ainsi que $p\,s$ par la même raison, $S\,E$ sera aussi égale et parallèle à $A\,P$ (33. *liv.* 1), de même que $s\,E$ l'est à $A\,p$. A cause de l'égalité et du parallélisme des trois droites $P\,S$, $T\,R$, $p\,s$, on prouvera de même l'égalité de $R\,S$, $R\,s$ aux lignes $P\,T$, $p\,T$, toutes deux déjà démontrées égales à $A\,P = R\,Q$. Comparant maintenant les points H, S, E, s, R de cette figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation:

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ \, [18],$$

on tirera pour la figure 45 :

$(HS)^2 = (SE)^2 + EH \cdot RH = (RQ)^2 + EH \cdot RH = \frac{2}{4} + \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{22}{4}$:

d'où $HS = \frac{1}{2}\sqrt{22}$.

La base AE du triangle AME étant divisée en deux parties égales par la droite MR, on aura [26] :

$(AM)^2 + (EM)^2 = 2(RA)^2 + 2(RM)^2$,

c'est-à-dire, $\frac{6}{4} + 3 = \frac{2}{4} + 2(RM)^2$:

d'où il résulte après la réduction :

$$(RM)^2 = 2 = (BM)^2 = (Bm)^2;$$

de cette valeur, on déduiroit de la même manière celle de $(Rm)^2$: d'où $BM = MR = Rm = mB$. Si maintenant on compare les quatre points B, M, R, m de la figure 45 avec les quatre points A, Q, B, q de la figure 3, on a (15) :

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2;$$

et de-là : $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$;

c'est-à-dire, $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$;

on aura pour la figure 45 :

$$(Mm)^2 = 4(BM)^2 - (BR)^2 = 8 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = \frac{32}{4} - \frac{9}{4} = \frac{23}{4} :$$

d'où $Mm = \frac{1}{2}\sqrt{23}$.

Les triangles BME, BnE ayant les côtés égaux entr'eux, et ayant tous deux la base commune BE divisée en deux parties égales

par les lignes AM, An, de l'équation (26), il résultera la même valeur pour AM, An. Donc les triangles BAM, $E\alpha n$ ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $BAM = EAn$ (8. *liv.* 1); d'où, à cause de la droite BAE, la somme des angles MAB, MAE étant égale à deux droits (13. *liv.* 1); et substituant à l'angle MAB son égal EAn, la somme des deux angles MAE, EAn vaudra deux angles droits; d'où les deux lignes MA, An seront une seule ligne droite, (14. *liv.* 1).

On aura donc : $(Mn)^2 = 4 (AM)^2 = \frac{24}{4}$: d'où $MN = \frac{1}{2} \sqrt{24}$.

Enfin, $HE = \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{25}$.

105. Comme on a $\frac{1}{2} \sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$; par exemple, $\frac{1}{2} \sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$, etc., on aura facilement, au moyen de ce problême, les racines de tous les quarts depuis un jusqu'à vingt-cinq : ce dont on fera usage, comme nous le verrons, dans la construction des figures semblables.

106. Si on avoit pris le rayon $AB = 2$, on auroit eu toutes ces distances doubles de valeur ; d'où nous aurions eu les racines entières des nombres depuis 1 jusqu'à 25. On pourroit donc facilement doubler l'une quelconque de ces moitiés de racines, pour avoir la racine entière (64).

107. La facilité de cette construction qu'on exécute avec les trois seules ouvertures déjà observées (35) ; savoir :

la première $= \sqrt{1}$;
la troisième $= \sqrt{2}$;
la seconde $= \sqrt{3}$,

avec lesquelles on a déjà divisé le cercle en 24 parties égales, et trouvé ensuite les 25 racines successives des premiers nombres, fait voir l'excellence de la Géométrie du compas, et combien elle peut contribuer à la perfection des Arts.

108. On a eu soin, dans la construction précédente, d'employer le plus qu'il a été possible le premier compas dont l'ouverture $=1$, qui a décrit la circonférence *B D d*, et qui, conservant l'ouverture fondamentale, mérite plus de confiance que les autres. C'est aussi pourquoi on n'a voulu employer que les trois premiers compas les plus remarquables (107) ; ce qui a fait que quelques-unes des sections des arcs se sont faites à angles un peu aigus, comme celles des points *S*, *s*, *O*, *o*, et sur-tout celles des points *L* et *l*. Si on vouloit avoir tous les angles d'intersection plus approchans de l'angle droit, on pourroit employer la construction suivante.

Autre construction de la figure 45.

109. Après avoir trouvé les points *M* et *m*, comme dans la solution (104); du rayon *BD* et des centres *M* et *m*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *H*.

Du rayon *AB*, et du centre *H*, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en *O* et *o*; du même rayon soient déterminées les demi-circonférences *OEs*, *oES* (64); du rayon *BE* et du centre *H*, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en *L* et *l*.

Tous les autres points de la figure se trouveront comme au n.º 104.

Démonstration. Nous démontrerons que les points que l'on trouve avec cette construction, sont les mêmes que ceux trouvés par la première.

Après avoir démontré [104] que $BM = MR = Rm = mB$, et que les trois points *B*, *A*, *R* sont dans la même droite, ayant de plus par construction $MH = ME = mH = mE$, *H* sera sur la même droite *BAR* [13], et on aura $HB = RE$ [14] : donc le point *H* sera le même que dans l'autre construction. Ensuite les lignes *HO*, *Ho* étant égales dans les deux constructions, les points *O* et *o* seront aussi les mêmes. Si on

soustrait l'arc osE des deux demi-circonférences BsE, oES, les arcs restans Bo, ES seront égaux.

D'où : $ES = Bo = BO = AQ = RQ$:

d'où aussi le point S sera le même que dans la première construction ; le point s le sera également ; puis la base HTR du triangle HLR étant divisée par LT en deux parties égales, on aura (26) :

$$(HL)^2 + (LR)^2 = 2(HT)^2 + 2(TL)^2;$$

c'est-à-dire, $4 + (LR)^2 = 2 + 2(TL)^2$;

ou bien $2 + (LR)^2 = 2(TL)^2$.

Mais encore la base TR du triangle TLR étant divisée par moitié au point A par la droite LA, on aura (26) :

$$(TL)^2 + (LR)^2 = 2(TA)^2 + 2(AL)^2;$$

et doublant :

$$2(TL)^2 + 2(LR)^2 = 4(TA)^2 + 4(AL)^2$$
$$= 1 + 4 = 5;$$

d'où soustrayant $2(LR)^2$, on a :

$$2(TL)^2 = 5 - 2(LR)^2.$$

Mais on a trouvé ci-dessus :

$$2(TL)^2 = 2 + (LR)^2:$$

donc :

$$5 - 2(LR)^2 = 2 + (LR)^2.$$

Soustrayant 2, et ajoutant $2(LR)^2$, on a :

$$3 = 3(LR)^2;$$

d'où : $1 = (LR)^2 = (AB)^2$.

Donc on aura $LR = AB$ comme dans la première construction. On prouvera la même chose pour Rl; les autres points sont déterminés comme dans la construction précédente : donc tous les points de la figure sont les mêmes que dans cette construction.

GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE SEPTIÈME.

DE L'INTERSECTION DES LIGNES DROITES AVEC LES ARCS DE CERCLE ET ENTRE ELLES.

PROBLÊME.

110. *ÉTANT donnés deux points* L *et* M *d'une droite* (fig. 46), *et le centre* A *avec le rayon* AB *d'un arc* BCD, *trouver les deux points* P *et* Q *auxquels la ligne* LM *coupe ledit arc, si toutefois elle le coupe.*

Solution. Des points *L* et *M* donnés sur la droite, pris pour centres, et avec leurs distances respectives *MA*, *LA* du centre donné, prises pour rayons, soient décrits deux arcs qui se coupent en *V*; du centre *V* et du rayon donné *AB*, soit décrit un arc indéfini *EFG*; si cet arc coupe l'arc donné en *P* et *Q*, ces deux points seront les points cherchés; s'il ne le coupoit pas,

la droite *LM* n'en couperoit pas moins l'arc donné.

Démonstration. Les quatre distances *AP*, *AQ*, *VP*, *VQ* étant égales entr'elles, et les deux autres *AM*, *VM* aussi égales entr'elles, les trois points *P*, *M*, *Q* seront dans la même droite (13). On démontre de la même manière que les trois points *Q*, *P*, *L* sont dans la même ligne droite : donc la droite *LM* passe par les points *P* et *Q*, quand ces points d'intersection s'y trouvent.

Si le cercle *EFG* [*fig.* 47], décrit du centre *V* et du rayon *AB*, ne coupoit pas le cercle *BCD*, *LM* ne couperoit pas ce même cercle. En effet, si on conçoit la droite *VA* qui coupe les cercles en *C* et *F*, *CF* étant divisée par moitié en *m*, on aura $Vm = mA$. Donc *LM* coupera perpendiculairement *VA* en *m* [14] hors du cercle *BCD*; si on prend un autre point quelconque *P* sur la droite *LM*, dans le triangle rectangle *PmA*, on aura le côté *PA* plus grand que *mA*, parce qu'il est opposé à un plus grand angle (32, et 18. *liv.* 1). Donc le point *P* sera beaucoup plus hors du cercle que le point *m* : donc la droite *LM* ne coupera dans aucun point le cercle *BCD*.

PROBLÈME.

111. *Etant donné* [fig. 48.] *un arc* BCD *décrit du centre* A, *trouver les deux points où la circonférence est coupée par la droite qui passe par* A *et par un autre point donné* L.

Solution. Du centre *L* et d'un rayon arbitraire *LP*, soit décrit un arc qui coupe l'arc *BCD* en *P* et en *Q*; soit partagé l'arc *PQ* en deux parties égales au point *m* (60); soit déterminée la demi-circonférence *mDn* (64); les points *m* et *n* seront les deux points cherchés.

Démonstration. Les trois points *A*, *m* et *L* étant à la même distance des points *P* et *Q*, seront dans la même ligne droite (13). Mais la droite *mA* contient aussi le point *n*, extrémité du diamètre *mn* (15. *liv.* 4) : donc, etc.

PROBLÈME.

112. *Etant donnés deux points* A, B *d'une droite* [fig. 49 et 50.], *et deux points* C, D *d'une autre droite, trouver le point* S *où elles se coupent.*

Solution. De deux points d'une des deux droites, par exemple, des points *A* et *B* pris pour centres, et avec les distances respectives *AC*, *AD* de ces points, et *BC*, *BD* des deux points *C*, *D* de l'autre droite, prises pour rayons, soient décrits quatre arcs, dont deux se coupent aux points *C* et *c*, et les deux autres aux points *D* et *d*.

Soit trouvé le quatrième point δ du parallélogramme $CDd\delta$, en faisant à $Dd = C\delta$, et à $DC = d\delta$ (11).

Soit trouvée la quatrième proportionnelle aux trois lignes $c\delta$, *CD*, *Cc*.

Avec cette distance prise pour rayon et des centres *C* et *c*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *S*; le point *S* sera celui de l'intersection des deux droites *AB*, *CD*.

Démonstration. Les droites *AB*, *Cc* seront perpendiculaires l'une à l'autre (13, 14), ainsi que *AS*, *Cc* : donc le point *S* sera dans la même ligne *AB*; puis *AB* ou *AS* étant aussi perpendiculaire à *Dd* [13, 14], la même ligne *Dd* sera parallèle à *Cc* (29. *liv*. 1). Mais à cause des côtés égaux entre eux dans les deux triangles $dC\delta$, *dCD*, on a les angles $dC\delta$, *CdD* égaux (8. *liv*. 1).

Donc

Donc les deux lignes $C\delta$, Dd sont aussi parallèles (28. *liv.* 1) : donc les points c, C, δ sont dans la même droite. Maintenant, à cause des deux côtés égaux dans les deux triangles CBA, cBA, les angles CBA, cBA seront égaux (8. *liv.* 1) ; par la même raison, on trouvera les angles ABD, ABd égaux dans les triangles ABD, ABd : donc, dans la figure 49, l'angle cBd, qui est la somme des deux angles cBA, ABd, sera égal à l'angle CBD, somme des deux angles CBA, ABD. Dans la figure 50, l'angle cBd, qui est la différence des deux angles ABd, cBA, sera aussi égal à l'angle CBD, qui est la différence des deux angles ABD, CBA : donc pour les deux figures dans les triangles cBd, CBD, qui ont deux côtés et l'angle compris égaux, le troisième côté cd sera égal au troisième côté CD (4. *liv.* 1). Mais $CD = d\delta$: donc le triangle $cd\delta$ est isoscèle ; de plus, le triangle cCS étant aussi isoscèle, on a la proportion :

$$c\delta : CD \text{ ou } d\delta :: Cc : CS ;$$

d'où vient encore :

$$c\delta : cd :: cC : cS.$$

Donc les deux triangles $c\delta d$, cCS ont les angles égaux entr'eux (5. *liv.* 6) ; d'où l'angle $c\delta d$ étant égal à l'angle cCS, CS sera parallèle à δd (29. *liv.* 1). Or CD est aussi parallèle à δd : donc le point S sera sur cette ligne : donc, etc.

GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE HUITIÈME.

DE LA CONSTRUCTION, DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES ANGLES, ET DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

113. OBSERVATION. Quand nous dirons : *construire un angle* a b c [*fig.* 51] *avec le compas*, nous entendrons : *trouver avec le compas trois points* a, b, c, *ou un de ces points étant donnés, trouver les autres, de manière qu'en tirant ensuite par deux de ces points* a, b, *une droite, et par un de ces deux points* b, *et le troisième* c, *une autre droite, on ait un angle* a b c *aussi grand qu'on veut.* Quoique l'angle *a b c* ne soit pas réellement construit, les droites *ab, bc* n'étant pas encore tirées, ce qui ne peut se faire avec le compas seulement, néanmoins nous adopterons la première phrase, en y attachant le sens dont nous sommes convenus.

PROBLÊME.

114. *Etant donné un angle* ABC *au moyen des trois points* A, B, C, *et deux autres points* b *et* a, *trouver un point* c *tel que l'angle* abc *soit égal à* ABC.

Solution. Cherchez (93) une quatrième proportionnelle aux trois distances *AB*, *ab*, *BC*; avec cette ligne prise pour rayon, et du centre *b*, décrivez un arc qui passe par le point *c*; cherchez de même une quatrième proportionnelle aux trois distances *AB*, *ab*, *AC*, et avec cette ligne prise pour rayon, du point *a* pris pour centre, décrivez un autre arc qui coupe le premier en *c*, on aura l'angle *abc* = *ABC*.

Démonstration. Puisque les deux triangles *ABC*, *abc* ont leurs côtés proportionnels, les angles opposés aux côtés proportionnels seront égaux (5. *liv.* 6).

115. La solution du problême précédent [114] servira donc aussi à résoudre le problême suivant : *Etant donnés trois points* A, B, C [*fig.* 51], *qui forment les sommets des trois angles d'un triangle, et deux autres* a *et* b, *et qui soient les sommets de deux*

angles d'un autre triangle, trouver un troisième point c, *de manière que le triangle* a b c *soit semblable au triangle* A B C.

PROBLÊME.

116. *Doubler, tripler, quadrupler, etc., un angle donné* B A C (113).

Solution. Du centre *A* [*fig.* 52], et avec les côtés *A B*, *A C*, pris pour rayons, décrivez deux arcs indéfinis *B D F*, *C E*;
faites à *C B* = *C D*, l'angle *B A D* sera double de *B A C*;
faites à *C D* = *D E*, l'angle *B A E* sera triple de *B A C*;
faites à *D E* = *E F*, l'angle *B A F* sera quadruple de *B A C*, etc.
Pour quadrupler l'angle proposé, on pourroit encore faire à *B D* = *D F*.

Démonstration. Les triangles *B A C*, *C A D*, *D A E*, *E A F* ayant leurs côtés respectivement égaux, les angles *B A C*, *C A D*, *D A E*, *E A F*, etc. (8. *liv.* 1), seront égaux. Donc, etc. : d'où, l'angle *B A D* étant égal à *D A F*, on aura aussi : *B D* = *D F* (4. *liv.* 1).

PROBLÊME.

117. *Reconnoître si l'angle* B A G

donné au moyen des trois points B, A, G *est égal à la moitié d'un angle droit.*

Solution. Du rayon *A B* [*fig.* 53], et du centre *A*, décrivez la demi-circonférence *B F E* [64]; faites à *G B* = *G F* [10]. Si l'on a *B F* = *F E*, l'angle *B A G* sera égal à la moitié d'un angle droit; si *B F* est plus petit ou plus grand que *F E*, l'angle *B A G* sera plus petit ou plus grand que la moitié d'un angle droit.

Démonstration. Puisque l'angle *B A F* est double de l'angle *B A G* [116]; si l'angle *B A G* est égal à la moitié d'un angle droit, l'angle *B A F* sera droit, et par conséquent l'on aura *B F* = *F E* [83]. Mais si *B A G* est moindre ou plus grand que la moitié d'un angle droit, *B A F* sera moindre ou plus grand qu'un angle droit, et par conséquent *B F* plus petit ou plus grand que *F E* (24. *liv.* 1).

PROBLÊME.

118. *Diviser en deux parties égales l'angle* B A C *donné au moyen des trois points* B, A, C *seulement, le point* A *n'étant pas pris à la même distance du point* B *que du point* C.

Solution. Du centre *A* [*fig.* 54], et du rayon *A B*, décrivez l'arc *B M D*; faites à *C B* = *C D*; divisez l'arc *B M D* en deux parties égales au point *M* [60]; divisez l'arc *B N* en deux parties égales en *N*; l'angle *B A N* sera la moitié de l'angle *B A C*.

Démonstration. L'angle *B A D* étant double de *B A C* [116], et double aussi de *B A M*, (33. *liv.* 6), l'angle *B A C* sera le même que *B A M*; mais l'angle *B A N* est la moitié de *B A M*: donc aussi *B A N* sera la moitié de *B A C*.

PROBLÊME.

119. *Etant donné l'arc* BC [fig. 55] *décrit du point* A *pris pour centre, en trouver le sinus, le cosinus, la tangente et la sécante.*

Solution. Dans la circonférence décrite avec le rayon *A B*, faites à *B C* = *B c*; divisez en deux parties égales la corde *C c* au point *M* [66]; *C M* sera le sinus et *M A* le cosinus de l'arc donné.

Du point *M* pris pour centre, et du rayon *M A*, décrivez un arc qui coupe, s'il est possible, la circonférence en *D* et en *d*; déterminez la demi-circonférence *d D δ* [64]; prolongez *B A* de *B* en *V*, en faisant *B V*

$= BA$: des centres A et V, et du rayon $D\delta$, décrivez deux arcs qui se coupent en S, BS sera la tangente, et SA la sécante.

Démonstration. La ligne BA coupe au point M la corde Cc en deux parties égales, et à angles droits [14] : donc CM est le sinus, et MA le cosinus de l'arc BC.

SB est perpendiculaire à AB [83]; $D\delta$ est troisième proportionnelle aux deux lignes AM, AC [87] : il en sera de même de AS qui est égal à $D\delta$. Donc, dans les deux triangles rectangles AMC, ABS, on a la proportion : $AM : AC :: AB : AS$,
et *invertendo* (4. *liv.* 5) :

$$AC : AM :: AS : AB.$$

On tire de-là (35. *liv.* 5) :

$$(AC)^2 : (AM)^2 :: (AS)^2 : (AB)^2 ;$$

et en substituant pour $(AC)^2$ et $(AS)^2$ leurs valeurs tirées de la 47.ᵉ proposition du *liv.* 1, on aura :

$$(AM)^2 + (MC)^2 : (AM)^2 :: (AB)^2 + (BS)^2 : (AB)^2.$$

D'où (17 *liv.* 5) :

$$(MC)^2 : (AM)^2 :: (BS)^2 : (AB)^2 ;$$

et (34. *liv.* 5).

$$MC : AM :: BS : AB :$$

donc, les côtés MC, BS seront aussi proportionnels : donc l'angle MCA sera le même que

B S A (5. *liv.* 6) : donc les points *A*, *C*, *S* seront dans la même droite, et *B S* sera la tangente, et *A S* la secante de l'arc *B C*.

Si le cercle décrit du centre *M* et du rayon *M A* ne coupoit pas la circonférence, ou la coupoit sous des angles trop aigus, il faudroit avoir recours aux moyens indiqués (89 ou 90 et 91).

Autre Solution pour trouver la tangente et la sécante.

Décrivez [64] la demi-circonférence *B C E* [*fig.* 56]; du rayon *B C* et du centre *E*, coupez-la au point *Q*; du rayon *C Q* et des centres *A* et *B*, décrivez deux arcs indéfinis qui se coupent en *V*; avec le même rayon *C Q* et du centre *V*, coupez la circonférence en *e*; du rayon *E e* et des centres *A* et *B*, décrivez deux arcs qui se coupent en *m*; du même rayon *E e* et du centre *m*, décrivez la demi-circonférence *A B S* [64], *S B* sera la tangente et *S A* la sécante de l'arc *B C*.

Démonstration. Si l'arc *B C F* est égal au quart de la circonférence $= F E$; comme on a par construction $B C = Q E$, on aura aussi $C F = F Q$. On sait de plus, par les définitions trigonométriques, que le sinus de l'arc *C F* est le même que le cosinus de l'arc *B C*,

et que la corde de l'arc CFQ double de l'arc CF, est double du sinus de l'arc CF ou du cosinus de l'arc BC : cette corde est égale à $CQ = AV$; on a de plus [22] :

$$AV.Ee = (AB)^2:$$

la ligne AmS [64] étant droite $= 2Ee$, et $aV = 2\cos.BC$; on aura :

$$2Ee.\cos.BC = (AB)^2 = AS.\cos.BC:$$

donc (17. *liv.* 6) :

$$\cos.BC : AB :: AB : AS;$$

donc AS sera troisième proportionnelle au cosinus et au rayon, et par conséquent égale à la sécante, suivant les démonstrations trigonométriques. De plus, l'angle ABS étant droit [31. *liv.* 3], la sécante AS sera déterminée de position, et par conséquent BS sera la tangente.

PROBLÈME.

120. *Etant donné le sinus* mn *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez [*fig.* 57] avec le rayon AB, le cercle CcK; doublez mn [64]; d'un rayon $= 2mn$, et d'un point quelconque C de la circonférence, décrivez un arc qui la coupe en c : divisez l'arc Cc en deux parties égales au point B [60]; BC sera l'arc cherché.

Démonstration. Le sinus de l'arc *B C*, d'après les définitions trigonométriques, est la moitié de la corde double de *B C*: donc, etc.

PROBLÈME.

121. *Etant donné le cosinus* ma *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez le cercle *C c K* [*fig.* 57] avec le rayon *A B*, doublez *m a* [64]: d'un point quelconque *c* de la circonférence pris pour centre, et d'un rayon $= 2\, m\, a$, coupez la circonférence au point *K*; déterminez la demi-circonférence *K c C* [64]; divisez en deux parties égales l'arc *C c* au point *B* [60]; *B C* sera l'arc cherché.

Démonstration. Tirez l'autre corde *C c*, elle sera divisée au point *M* en deux parties égales et à angles droits par le rayon *A B* [14], Mais l'angle *C c K* étant inscrit et appuyé sur le diamètre, est aussi droit (31. *liv.* 3): donc les deux triangles *C M A*, *C c K*, qui ont un angle commun en *C*, et chacun un angle droit, sont équiangles entr'eux (32. *liv.* 1): donc on a (4. *liv.* 6): $CM : Cc :: MA : cK$: mais *C M* est la moitié de *C c*; donc $MA = \frac{1}{2}\, cK = m\, a$; de plus, *M A* est le cosinus de l'arc *B C*; donc, etc.

PROBLÈME.

122. *Etant donnée la tangente* s b *d'un arc d'un rayon donné* A B [fig. 55], *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon *A B* le cercle *B C*δ ; au point *B* élevez sur *A B* une perpendiculaire *B S* = *b s* [76] ; trouvez [111] le point *C* où *S A* coupe la circonférence ; *B C* sera l'arc cherché.

Cette solution n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME.

123. *Etant donnée* [fig. 55] *la sécante* s a *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon *A B* la circonférence *B C*δ ; sur *A B* portez *B V* = *A B* [64] ; puis, des centres *A* et *V*, et du rayon *s a*, décrivez deux arcs qui se coupent en *S* ; trouvez [111] le point *C* où la ligne *S A* coupe la circonférence, *B C* sera l'arc chérché.

Démonstration. La ligne *S B* sera perpendiculaire à *B A* [83] : donc elle sera la tangente de l'arc *B C*, et par conséquent *S A* en sera la sécante.

GÉOMÉTRIE

DU COMPAS.

LIVRE NEUVIÈME.

DES FIGURES SEMBLABLES ET DES POLIGONES RÉGULIERS.

124. OBSERVATION. Quand nous dirons : *Construire une figure ou un polygone*, nous entendrons : *Trouver tous les points qui suffisent pour déterminer de grandeur et de position toutes les droites qu'il conviendroit de tirer pour construire entièrement le polygone.*

PROBLÊME.

125. *Sur un côté donné* ab, *construire un triangle semblable à un triangle donné* ABC [fig. 51].

Solution. Voyez 115.

PROBLÊME.

126. *Etant donnée* [fig. 58] *une figure*

ABCEFD, *construire une figure qui lui soit semblable, et dont la surface soit avec celle de cette figure dans un rapport donné.*

Solution. Si l'on veut, par exemple, que la surface de la nouvelle figure soit les deux cinquièmes de la surface de la figure donnée.

D'un rayon *A B*, le plus grand qu'il sera possible, construisez la figure 43 [100]: prenez dans cette figure la ligne $A\,a = \sqrt{2}$ pour rayon: du centre *O* [*fig.* 58], décrivez le cercle plus petit, dans la circonférence duquel se trouve le point *v*. De la ligne *E T* $= \sqrt{5}$ [*fig.* 43], prise pour rayon, et du même centre *O*, décrivez le cercle plus grand, dans la circonférence duquel se trouve le point *V*, déterminé par rapport au point *v*, de telle manière que la ligne *Vv* soit à-peu-près tangente au point *v* du cercle intérieur.

Supposez la figure donnée divisée en autant de triangles *ABC*, *ACD*, *CDE*, *EDF*, en imaginant des droites *A C*, *C D*, etc. et placez les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. sur les distances *AB*, *AC*, *CD*, etc. qui mesurent les côtés de ces triangles; appliquez successivement les distances 1, 2, 3, etc. comme

cordes à autant d'arcs consécutifs du cercle *V*; savoir : *AB* de *V* en 1, *A C* de 1 en 2, *B C* de 2 en 3, et ainsi de suite jusqu'à la fin. Ce que l'on fera en prenant la distance *A B* pour rayon, et en décrivant du point *V* pris pour centre un arc qui coupe cette même circonférence au point 1, etc.

D'un rayon égal à *V v*, et en prenant successivement pour centres les points 1, 2, 3, 4, etc., décrivez des arcs qui coupent successivement la plus petite circonférence aux points 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à la fin.

Les cordes du cercle intérieur, ou les distances de *v* à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, de 3 à 4, etc. seront les côtés *ab*, *a c*, *b c*, *cd*, etc. de la nouvelle figure que l'on construira triangle par triangle ; avec la distance du point *v* au point 1, on déterminera les deux points *a* et *b*; des centres *a* et *b*, et avec la seconde et la troisième distance, prise dans le cercle intérieur (la seconde du point 1 au point 2, et la troisième du point 2 au point 3), décrivez deux arcs qui se coupent en *c*; des centres *c* et *a*, et avec les distances quatrième et cinquième, prises dans le cercle intérieur (la quatrième, de 3 à 4, et la cinquième, de 4 à 5), décrivez deux arcs qui se coupent en *d* : on déterminera de la même

manière les points *e* et *f*, et la figure sera construite.

Démonstration. Les cordes du cercle intérieur sont aux cordes homologues du cercle extérieur, comme le rayon *Ov* est au rayon *OV* [93], ou comme $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{5}$: donc tous les côtés des triangles de la figure *abcefd*, et les côtés homologues des triangles de la figure *ABCEFD* sont dans le même rapport : donc les triangles des deux figures sont équiangles entr'eux, et par conséquent semblables (5. *liv.* 6. *déf.* 1) : donc les deux mêmes figures polygones sont semblables (20. *liv.* 6), et les surfaces étant entr'elles comme les quarrés des côtés homologues, la surface du polygone *abcefd* sera à celle du polygone *ABCEFD*, comme 2 est à 5 : donc la surface de la plus petite des deux figures sera à celle de la plus grande, comme 2 est à 5.

D'après cet exemple, il est facile de voir la méthode à suivre pour résoudre le problême, quel que soit le rapport qu'on propose d'établir entre la surface de la figure à construire, et celle de la figure donnée.

On décrira deux circonférences *v* et *V* avec des rayons qui soient entr'eux comme les racines des nombres qui expriment le rapport

rapport des surfaces ; sur celle des deux circonférences qui correspond à la figure donnée, on portera successivement comme cordes les côtés des triangles dans lesquels cette figure est supposée divisée. On déterminera, par la méthode ci-dessus exposée, dans l'autre circonférence des cordes proportionnelles qui seront les côtés respectifs des triangles de la nouvelle figure.

Le rapport des moitiés des racines étant le même que celui des racines entières, la figure 45 servira dans plusieurs cas (104). Pour les autres cas, voyez les numéros 101, 102 et 103.

On prend ensuite un rayon *A B* [*fig.* 44 et 45], le plus grand que l'on peut employer commodément, pour que les cercles puissent mieux recevoir les longueurs des cordes à appliquer, et pour que les intersections qui en résultent se fassent à angles plus approchans de l'angle droit.

127. Si on avoit donné le rapport des côtés *A B* et *a b* entr'eux, ou de deux autres droites quelconques entr'elles, on choisiroit dans ce rapport les deux rayons *O V*, *O v*, les plus grands possibles.

PROBLÈME.

128. *Inscrire à un cercle donné un quelconque des polygones réguliers que l'on peut y inscrire en se servant de la règle et du compas.*

Solution. Divisez la circonférence en autant de parties égales que le polygone qu'on veut inscrire a de côtés (27, 29, 30, 31, 32, 38, 40, 41, 42, 53, 57, 60, 63), les points de division seront les sommets des angles du polygone régulier cherché, et les cordes des arcs en seront les côtés.

Démonstration. Tous les côtés étant égaux comme cordes d'arcs égaux, les angles qu'ils forment seront égaux, puisqu'ayant leur sommet à la circonférence, ils sont tous appuyés sur des arcs égaux (21. *liv.* 3). On a donc inscrit au cercle un polygone régulier d'autant de côtés que l'on vouloit (*déf.* 1. *liv.* 3).

129. Puisqu'avec trois points seulement pris hors de la circonférence, et six ouvertures de compas au plus (59), on peut la diviser en 240 parties égales (57), on pourra inscrire au cercle avec ces trois points et ces six ouvertures, autant de polygones réguliers qu'il y a

de nombres exactement diviseurs de 240 : or ces nombres sont : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240 ; on pourra donc, en omettant le diviseur 2, inscrire au cercle un polygone régulier de 3, de 4, de 5, de 6, de 8, de 10, etc., et enfin de 240 côtés.

130. Si le nombre des côtés du polygone que l'on veut inscrire se trouve être un de ceux dans lesquels on a divisé la circonférence, par les méthodes enseignées (27, 30, etc.), par exemple, le nombre 12, on divisera la circonférence en douze parties égales (31) ; les deux extrémités de chacune de ces divisions seront les sommets des angles du polygone qu'il étoit question d'inscrire, ou, ce qui est la même chose, les cordes de ces arcs seront les côtés du polygone.

Si le nombre des côtés du polygone à inscrire ne se trouve point précisément dans les problêmes du liv. II ; par exemple, si l'on veut inscrire un polygone de 60 côtés, on doublera, triplera, quadruplera, etc. ce nombre jusqu'à ce qu'on parvienne à avoir un de ceux exprimés dans les problêmes précédens : c'est ainsi qu'en doublant 60, nombre des côtés du polygone indiqué, on a 120. Or on

a donné (42) le moyen de diviser la circonférence en 120 parties égales. Ces parties prises deux à deux fourniront 60 arcs égaux dont les cordes sont les côtés du polygone en question.

S'il avoit fallu tripler le nombre, par exemple si on eût voulu inscrire un polygone de 16 côtés, on auroit alors, comme au problême (38), divisé la circonférence en 48 parties, nombre triple de 16; on auroit pris ensuite trois de ces arcs pour en avoir un qui fût la seizième partie de la circonférence, et chacun de ces arcs égaux auroit eu pour corde un côté du polygone de 16 côtés.

PROBLÊME.

131. *Circonscrire un triangle équilatéral* (124) *à un cercle donné* BCDd [fig. 59.].

Solution. Soit fait au rayon AB de ce cercle $= BC = CD$, et à $BD = BL = DL = Dd = DN = dN = dM = BM$.

Les trois points L, M, N seront les sommets des angles du triangle équilatéral circonscrit au cercle.

Démonstration. Le triangle *B D d*, inscrit au cercle (29, 130), étant équilatéral, les triangles *D L B*, *N D d*, *d B M* auront leurs côtés égaux à ceux de ce triangle; donc leurs angles seront égaux (8. *liv*. 1); les trois angles *N D d*, *dD B*, *B D L* seront donc égaux aux trois angles du triangle inscrit, c'est-à-dire, à deux droits (32. *liv*. 1) : donc la ligne *NDL* sera droite (14. *liv*. 1.) : on démontreroit la même chose pour les deux lignes *L B M*, *N d M*; et comme chacune d'elles est double du côté *B D*, elles seront par conséquent égales entr'elles. Donc le triangle *LMN* est équilatéral; ensuite les angles *N D d*, *D L B* étant égaux, la droite *D d* sera parallèle à *L B* (29. *liv*. 1), ou à *L M*. Or les points *N*, *A*, *B* sont dans une même droite perpendiculaire à *D d* (13, 14). Donc *A B* est aussi perpendiculaire à *L M* (27. *liv*. 1) : donc *L M* est tangente au cercle (16. *liv*. 3). On démontreroit la même chose pour les deux lignes *N L*, *N M* : donc le triangle *N L M* est équilatéral et circonscrit au cercle (*déf*. 2. *liv*. 4).

PROBLÊME.

132. *Circonscrire un quarré à un cercle donné* [fig. 60].

Solution. Divisez la circonférence de ce cercle en quatre parties égales aux points *B*, *F*, *E*, *f* [27]; de ces points comme centres, et du rayon *A B*, décrivez des arcs qui se coupent en *R*, *S*, *T*, *V*, ces quatre derniers points seront les sommets des angles du quarré circonscrit au cercle.

Démonstration. Les angles *T B A*, *S B A* étant droits (100), la ligne *T S B* est une droite (14. *liv.* 1) perpendiculaire au diamètre *B E*, et par conséquent tangente au cercle (16. *liv.* 3): on démontreroit la même chose pour les autres lignes *T F V*, *V E R*, *R f S*. De plus, les triangles *BFT*, *BFA* ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle *B T F* = *B A F* (8. *liv.* 1), et par conséquent droit (27): la même chose se démontreroit pour les autres angles *V*, *R*, *S* : donc, etc.

PROBLÊME.

133. *Circonscrire à un cercle donné un pentagone régulier.*

Solution. Soit le cercle *B D E* [*fig.* 61], décrit avec le rayon *A B*; divisez sa circonférence en cinq parties égales (40) aux points *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; d'un de ces points *C* comme

centre, et du rayon *CB* décrivez la demi-circonférence *BDP* [64]; prenant pour centre le point *E* opposé à l'arc *CB*, et avec le rayon *EC* coupez l'arc *BDP* en *p*; des centres *B*, *C*, *D*, *E*, *F* et avec le rayon *Pp*, décrivez des arcs qui se coupent aux points *b*, *c*, *d*, *e*, *f*; ces points d'intersection seront les sommets des angles du pentagone circonscrit au cercle.

La démonstration est la même que celle du problême suivant.

PROBLÊME.

134. *Etant donnés les sommets des angles d'un polygone régulier quelconque inscrit au cercle, trouver les sommets des angles d'un polygone semblable circonscrit.*

Solution. Soient les points *B*, *C*, *D*, *E* [*fig.* 62] les sommets des angles du polygone inscrit : de l'un de ces points *C* pris pour centre, et d'un rayon égal à la distance *CB*, de deux d'entr'eux, décrivez la demi-circonférence *BDP* [64]; des centres *B* et *C*, et avec le rayon *BD*, décrivez deux arcs qui se coupent au point *V* (dans le cas du problême précédent, [*fig.* 61], le point *V* coïncide

avec le point E) : de ce même rayon BD, et du point V comme centre, coupez la circonférence BDP en p; avec Pp pour rayon, et des centres B, C, D, E, etc., qui sont les sommets des angles du polygone inscrit, décrivez les arcs qui se coupent aux points b, c, d, e, etc.; ces points seront les sommets des angles du polygone régulier circonscrit.

Démonstration. On a : $pP.\ VC=(CD)^2$ [22], c'est-à-dire, $cC.\ BD=(BC)^2$; d'où (17. *liv.* 6) :

$$BD : BC :: BC : Cc :$$

mais $BC= CD$, et $Bc=cC$: donc les deux triangles isoscèles BCD, BcC auront leurs côtés proportionnels : donc (5. *liv.* 6) l'angle cCB sera égal à l'angle CBD; d'où il suit que les deux lignes cC, BD seront parallèles (28. *liv.* 1); on prouveroit de même que Cd est aussi parallèle à BD. Les points c, C, d seront donc dans la même ligne droite : mais de ce que $BC=CD$, il suit que le rayon AC est perpendiculaire à BD [14]; il le sera donc aussi à la droite cd (29. *liv.* 1): donc cd est tangente à sa moitié en C (16. *liv.* 3); on démontreroit de même que $de=cd$ est tangente à sa moitié en D; ainsi des autres. Le nombre de ces lignes sera égal à

celui des points *B*, *C*, *D*, *E*, etc. Donc, etc. (*déf.* 2. *liv.* 4).

PROBLÈME.

135. *Sur un côté donné* AE [fig. 1], *construire un triangle équilatéral.*

Solution. On trouvera le point *D* suivant la méthode indiquée (1); le triangle *A D E* sera le triangle cherché.

PROBLÈME.

136. *Sur un côté donné* AB [fig. 43], *construire un quarré.*

Solution. Les deux points *F*, *T* étant trouvés d'après la méthode prescrite (100), le quarré *A B T F* sera le quarré cherché.

Démonstration. *B T* étant égale et parallèle à *F A*, et par conséquent perpendiculaire à *A B* (100), la ligne *F T* sera aussi parallèle à *B A* (33. *liv.* 1); d'où aussi les angles *B T F*, *A F T* seront droits (27. *liv.* 1), et *A B T F* sera un quarré (*déf.* 32. *liv.* 1).

PROBLÊME.

137. *Sur un côté donné* AB [fig. 63], *construire un pentagone régulier.*

Solution I. Avec le rayon *A B* et du centre *A*, décrivez la circonférence *B C D E d*, et faites à *A B* = *B C* = *C D* = *D E* = *E d*; faites encore à *B D* = *B a* = *E a*, et ensuite à *A a* = *D b* = *d b*; du centre *B*, et avec le rayon *B A*, décrivez l'arc indéfini *A C L*, dans lequel vous ferez à *A b* = *A H* = *H K* = *K L*: pareillement, dans la circonférence *B C D*, faites à *A b* = *B Q* = *Q P* = *P N*. Des points *L* et *N* pris pour centres et du rayon *A B*, décrivez deux arcs qui se coupent en *M*; les points *A*, *B*, *L*, *M*, *N* seront les sommets des angles du pentagone régulier cherché.

Démonstration. L'angle *C B F* [*fig.* 61] du pentagone régulier *B C D E F*, a pour mesure la moitié de l'arc *C D E F* (20. *liv.* 3); cet angle étant donc égal à trois cinquièmes de la circonférence, l'angle *C B F* du pentagone a pour mesure les trois dixièmes : or les arcs *A H K L*, *B Q P N*, qui mesurent les angles *A B L*, *B A N*, valent chacun les trois dixièmes de la circonférence (41) : donc ces angles

A B L, *B A N* sont ceux du pentagone régulier à construire sur *A B*; ensuite les trois côtés *AB*, *B L*, *A N*, côtés du pentagone, sont égaux entr'eux; donc, en comparant les points *L*, *B*, *A*, *N* de la figure 63, avec les points *C*, *B*, *F*, *E* de la figure 61, le triangle *L M N* de la première figure, ayant les côtés respectivement égaux aux côtés du triangle *C D E* de la seconde, ils auront aussi les angles égaux (8. *liv.* 1), et tout coïncidera parfaitement : donc, etc.

Solution II. Décrivez comme ci-dessus, du rayon *A B* et du centre *A*, la circonférence *B D d* [*fig.* 64]; faites-y à $AB = BC = CD = DE = Ed$; à $BD = Ba = Ea$; et enfin, à $Aa = Db = db$; ensuite, avec le rayon *b E*, et du centre *A*, décrivez un arc qui passe par les points *L* et *M*; du centre *B*, et avec le même rayon *b E*, coupez cet arc au point *M* et la circonférence en *N*; enfin avec le même rayon, et du centre *N*, coupez l'arc *L M* en *L*; les points *A*, *B*, *L*, *M*, *N* seront les sommets des angles du pentagone régulier.

Démonstration. On a (4. *liv.* 2):

$$(BE)^2 = (bE)^2 + (Bb)^2 + 2Bb \cdot bE:$$

l'angle *B N E* étant inscrit et appuyé sur le diamètre, on a (31. *liv.* 3, 47. *liv.* 1):

$$(BE)^2 = (BN)^2 + (NE)^2:$$

en comparant les deux valeurs de $(BE)^2$, dans lesquelles $(bE)^2=(BN)^2$, il résulte que :

$$(Bb)^2+2Bb.bE=(NE)^2:$$

puis bE étant égal à $bA+AE=Ab+AB$, on aura :

$$(Bb)^2+2Bb.Ab+2Bb.AB=(NE)^2:$$

mais $2Bb.AB=2(Ab)^2$ [46] ;
donc

$$(Bb)^2+2Bb.Ab+(Ab)^2+(Ab)^2=(NE)^2:$$

or, $(Bb)^2+2Bb.Ab+(Ab)^2=(AB)^2$:
donc : $(AB)^2+(Ab)^2=(NE)^2$:
NE sera donc le côté du pentagone inscrit au cercle BDd [50] (10. *liv.* 13). L'arc NE étant égal à deux dixièmes de la circonférence, l'arc BCN sera égal à trois dixièmes, et l'angle BAN sera l'angle du pentagone régulier. Substituant ensuite la droite BN aux deux côtés BA, AN du pentagone régulier, elle deviendra le côté du triangle isoscèle qui a pour base AB, et chacun des angles à la base sera double de l'angle au sommet (11. *liv.* 4) ; les points L et M seront donc aussi les sommets du pentagone régulier que l'on avoit à construire.

PROBLÈME.

138. *Construire un exagone régulier sur un côté donné* AB [fig. 65].

Solution. Du rayon *A B* et des points *A* et *B*, comme centres, soient décrits deux arcs qui se coupent au point *O*; avec le même rayon, et du centre *O*, soit décrit un cercle dans la circonférence duquel on fera à *A B* = *B C* = *CD* = *DE* = *E F*; l'exagone *A B C D E F* sera l'exagone demandé.

Voyez pour la démonstration, la quinzième du *liv.* 4.

PROBLÈME.

139. *Sur un côté donné* AB [fig. 66], *construire un octogone régulier.*

Solution I. Des points *A* et *B* pris pour centres, et avec le rayon *A B*, décrivez les deux demi-circonférences *B C D E*, *A Cde* [64]; faites à *C E* = *E a* = *B a* = *A* α = *c* α; avec le rayon *AB* et du centre *a*, coupez l'arc *D E* au point *H*; avec le même rayon, et du centre α, coupez l'arc *de* au point *h*: encore avec le même rayon et des points *H*, *h* comme centres, décrivez deux arcs qui passent par les points *G*, *g*; avec le rayon *B a* et des points *a*, α pris pour centres, coupez ces deux arcs en *g*, *G*; avec le rayon *AB*, et des centres *G* et *g*, soient décrits deux arcs qui passent par les points *F* et *f*; coupez ces deux arcs en

f, *F* avec le rayon *A a*, et des centres *a*, *α*; les points *A*, *B*, *h*, *g*, *f*, *F*, *G*, *H* seront les sommets de l'octogone régulier construit sur le côté *A B*.

Démonstration. Les côtés *A B*, *B h*, *h g*, *g f*, *A H*, *H G*, *G F* sont tous égaux par construction. Maintenant, si l'on considère un octogone régulier inscrit au cercle, on trouvera que chacun de ses angles à la circonférence a pour base un arc égal aux $\frac{6}{8}$ de la circonférence, et par conséquent $\frac{3}{8}$ pour mesure (20. *liv.* 3); on a ensuite l'arc *B CH* égal à $\frac{3}{8}$ (30) : donc l'angle *B A H* est un angle de l'octogone, ainsi que l'angle *A B h* : ensuite *a A*, *α B* étant perpendiculaires à *A B* [27], elles seront parallèles entr'elles (29. *liv.* 1) : donc la droite *H a* qui fait un angle de 45° avec *a A* (27), en fera encore un semblable avec la ligne *α B* (27. *liv.* 1); mais *h B α* est aussi de 45° : donc *a H* est parallèle à *hB* (28. *liv.* 1) : donc aussi *a h* est égale et parallèle à *H B* (33. *liv.* 1); d'où l'angle $h\,a\,H = h\,B\,H$ (34. *liv.* 1); or l'angle *h B H* $= h\,B\,E - H\,B\,E = h\,B\,E - \frac{1}{2}\,H'A\,E$ (20. *liv.* 3), il aura donc pour mesure $\frac{3}{8} - \frac{1}{16}$, c'est-à-dire, $\frac{5}{16}$ de la circonférence : donc l'angle *B h a* qui avec l'angle *h a H* équivaut à deux droits (27. *liv.* 1), aura pour mesure $\frac{3}{16}$ de la

circonférence. Ensuite les deux triangles *a h B*, *a h g* ayant tous leurs côtés égaux entr'eux, l'angle *a h g* = *a h B* (8. *liv.* 1); d'où l'angle total *g h B* aura pour mesure $\frac{1}{8}$ de la circonférence, et sera angle de l'octogone, ainsi que l'angle *AHG*. L'angle *h g a* sera encore égal à l'angle *h B a*, et les deux triangles *g f a*, *B A a* ayant aussi les côtés égaux entre eux, l'angle *f g a* sera égal à *A B a* (8. *liv.* 1). L'angle *hgf* sera donc composé de deux angles respectivement égaux aux deux qui composent l'angle *h B A* : ces deux angles seront donc égaux, et chacun d'eux sera par conséquent angle de l'octogone : il en sera de même pour l'angle *H G F*; les points *f* et *F* seront donc aussi sommets d'angles de l'octogone comme tous les autres.

Solution II. Avec le rayon *AB* et des points *A* et *B* pris pour centres, décrivez comme ci-dessus les deux demi-circonférences *B C D E*, *A C d e*; et ayant fait à *C E* = *E a* = *B a* = *A* α = *e* α, du rayon *A B* et du centre *a*, décrivez un arc qui coupe l'arc *D E* en *H*, et passe par le point *F*; avec le même rayon, et du centre α, décrivez encore un arc qui coupe l'arc *d e* en *h* et passe par le point *f*; du rayon *aA* et du centre *a*, décrivez un arc qui passe par le point *f*; avec le

même rayon et du centre α, décrivez un arc qui passe par le point F : enfin, avec le rayon AB et des centres H et F, h et f, décrivez des arcs qui se coupent aux points G et g.

Démonstration. D'après la démonstration de la première solution, les droites AB, $a\alpha$ étant parallèles et égales entr'elles, ainsi que les droites aA, αB, avec lesquelles elles forment des angles droits, si on fait, pour abréger $AB = 1$; on aura aussi $a\alpha = \alpha f = aF = 1$: on a ensuite $(Aa)^2 = 2 = (af)^2 = (aF)^2$: donc les angles $f\alpha a$, $Fa\alpha$ seront droits (48. *liv.* 1), et les points f, α, B dans la même droite (14. *liv.* 1), comme aussi les points F, a, A dans la même parallèle : ensuite de l'égalité de $f\alpha$, Fa, il résulte que fF sera aussi égale et parallèle à $\alpha a = 1$, et $Fa\alpha f$ sera un quarré. De plus, les triangles FGa, HGa ayant les côtés égaux entr'eux, ont aussi les angles égaux (8. *liv.* 1), et l'angle FGa est égal à GaH; les deux droites GH, Fa seront donc parallèles, comme aussi FG, aH (33. *liv.* 1) : mais l'angle FaH extérieur au triangle aHA est égal aux deux angles intérieurs opposés aHA, aAH (32. *liv.* 1), c'est-à-dire, à trois angles demi-droits : donc on a l'angle $FaH = BAH$: donc aussi les angles opposés dans les parallélogrammes,

lélogrammes étant égaux (34. *liv.* 1), $FGH = BAH$; on a ensuite l'angle $AaH = aHG$: de plus, l'angle AHa est droit; donc aussi l'angle AHG vaut trois demi-droits : de même l'angle fFa étant droit, et l'angle aFG étant égal à aHG qui est demi-droit, l'angle fFG sera aussi égal à trois demi-droits : on démontre la même chose pour les angles en f, g et h: donc tous les côtés et tous les angles étant égaux, la figure sera un octogone régulier.

Si on quadruple les deux membres de l'équation (15) :

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2,$$

qui appartient à la figure 3 ; on aura :

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2;$$

c'est-à-dire, $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$; d'où résulte le théorême suivant pour tout rhombe quelconque : *le quarré d'une des diagonales du rhombe vaut quatre fois le quarré d'un de ses côtés, moins le quarré de l'autre diagonale* : d'où, dans le rhombe $FaHG$, on aura : $(aG)^2 = 4(Fa)^2 - (FH)^2$. Mais comme l'angle $FGH = HAB$, et que les côtés qui comprennent ces deux angles égaux sont aussi égaux, on a aussi : $FH = BH$ (4. *liv.* 1). On aura donc :

$$(aG)^2 = 4(AB)^2 - (BH)^2 = (BE)^2 - (BH)^2 :$$

mais (31. *liv.* 3, et 47. *liv.* 1) :

$$(BE)^2 = (BH)^2 + (HE)^2 :$$

donc $(aG)^2 = (HE)^2$; d'où $aG = HE$.

Solution III. Après avoir, du centre A et du rayon AB [*fig.* 67], décrit la demi-circonférence $BCDE$ (64), et avoir fait à $BD = Ba = Ea$; du centre a et du rayon AB soit décrit un arc qui coupe l'arc DE en H, et passe par F; du centre a et du rayon aA soit décrit un arc qui passe par f; du centre a et du rayon aB soit décrit un arc qui passe par g; du centre a et du rayon BH, soit décrit un arc qui passe par h; du centre a et du rayon HE soit décrit un arc qui passe par G; soit fait à $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$; on aura aussi $FG = GH$, etc.

Démonstration. Les triangles aAB, aBh, ahg, agf, etc. qui ont leur sommet en a, et leurs bases sur les côtés de la figure, ont tous leurs côtés respectivement égaux à ceux des triangles affectés des mêmes lettres dans la figure 66 (voyez les deux démonstrations précédentes) : donc ils auront aussi leurs angles égaux (8. *liv.* 1); et comme ils sont semblablement ordonnés, les angles de la figure 67, qui sont composés des angles de ces triangles pris deux à deux, seront aussi égaux aux angles de l'autre figure ; donc, etc.

Solution IV. Après avoir, du centre A et du rayon AB, décrit la demi-circonférence $BCDE$, en y faisant à $AB = BC = CD = DE$, et avoir fait à $BD = Ba = Ea$; ayant du centre a et du rayon AB coupé la demi-circonférence en H, soient des centres E et A, avec le rayon EH, décrits deux arcs qui se coupent en P; du centre P, avec le même rayon PA, soit coupée la demi-circonférence en Q; des centres B et H, avec le rayon BQ, soient décrits deux arcs qui se coupent en O: maintenant soit décrit du centre O et du même rayon OH, un cercle qui passera par A; soit fait dans sa circonférence à $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$; les points A, B, h, g, f, etc. seront les sommets des angles de l'octogone.

Démonstration. Comme on a $QP = AP = EP$, ainsi que $QA = AE = AB$, et que AB est sur le prolongement de AE (15. *liv.* 6), on aura [22]:

$$BQ . AP = (AQ)^2 :$$

d'où (17. *liv.* 6): $AP : AQ :: AQ : BQ$; ou bien : $HE : AE :: AB : BO$.

Mais HE est un côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon AE: donc aussi AB sera le côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon BO.

PROBLÈME.

140. *Sur un côté donné* AB [fig. 69.] *construire un décagone régulier.*

Solution. Du centre *A* et du rayon *A B*, soit décrit le cercle *B D d*; soit fait dans sa circonférence à *AB=B C=CD=DE=Ed*; soit fait à *BD=Ba=E a*; soit fait ensuite à *A a=D b=d b*. Maintenant des centres *A* et *B* avec le rayon *b E*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *V*; du centre *V* et du même rayon *b E*, soit décrit le cercle *BLMNOPQRSA*, et soit fait à *A B =BL=LM=MN=N O=OP=P Q =QR=RS*; le point *S* sera dans la section des deux circonférences, et les points *A*, *B*, *L*, *M*, etc. seront les sommets des dix angles du décagone régulier cherché.

Démonstration. La ligne *b E* est un côté du triangle isoscèle qui, ayant pour base *A B*, a chacun des angles à la base double de l'angle au sommet (137). Donc, dans le triangle *VA B*, l'angle *B VA* sera égal à un cinquième de deux angles droits (32. *liv.* 1); l'arc *B A* qui le mesure sera donc égal à un dixième de la circonférence, ainsi que les autres arcs *B L*, *L M*, *M N* : donc le polygone *A B L M N O P Q R S* sera un déca-

gone régulier inscrit au cercle qui a le point *V* pour centre, et construit sur le côté *AB*.

PROBLÈME.

141. *Sur un côté donné* AB [fig. 69], *construire un polygone régulier quelconque, de ceux qu'on peut inscrire au cercle* (128).

Solution. Du rayon *AB*, soit décrit un cercle *BDd*; soit inscrit à ce cercle un polygone régulier semblable à celui qu'on veut construire sur le côté *AB*, c'est-à-dire, d'un égal nombre de côtés (128), et soit *Bl* un côté de ce polygone inscrit; soit ensuite cherchée une troisième proportionnelle à ce côté *Bl* et au rayon *AB* (87, 89, 90, 91, 92); avec cette ligne prise pour rayon, et des centres *A* et *B*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *V*; du point *V* comme centre, et du même rayon *VA*, soit décrit un cercle *ABLMN*, etc., et soit fait à *AB*=*BL*=*LM*=*MN*, etc.; les points *A*, *B*, *L*, *M*, *N*, etc. seront les sommets des angles du polygone cherché.

Démonstration. Les côtés du triangle *BAl* étant proportionnels à ceux du triangle *BVA*, on aura l'angle *BAl*=*BVA* (5. *liv.* 6): donc les arcs *Bl*, *BA* qui le me-

surent, seront des portions égales de leurs circonférences; donc, etc.

PROBLÊME.

142. *Construire un quarré sur une diagonale* AB *donnée* [fig. 70].

Solution. Du centre *A* et du rayon *AB*, soit décrit l'arc *BCDE*; du centre *B*, avec le même rayon, soit décrit l'arc indéfini *CP*, et soit fait à $BC = CD = DE$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$. Maintenant, du centre *E* et du rayon *Aa*, soit coupé l'arc *CP* en *P*; des centres *A* et *B*, et du rayon *AP*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *L* et *M*; *ALBM* sera le quarré cherché.

Démonstration. Si on suppose pour abréger $AB = 1$, on aura :

$$AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ [104] = AL = BL :$$

d'où : $(AL)^2 = (BL)^2 = \frac{1}{2}$,

et $(AL)^2 + (BL)^2 = 1 = (AB)^2$.

Donc l'angle *BLA* est droit (48. *liv.* 1), et les deux angles *LBA*, *LAB* égaux entr'eux valent chacun la moitié d'un angle droit (5, et 32. *liv.* 1). On démontrera de même que l'angle *BMA* est droit, et que les angles *MBA*, *MAB* valent chacun la moitié d'un angle droit : donc les angles *MBL*, *MAL* seront droits, et *ALBM* sera le quarré cherché.

GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE DIXIÈME.

DES CENTRES.

PROBLÊME.

143. *TROUVER le centre d'un cercle donné* MAB [fig. 71].

Solution. Ayant pris pour centre un point quelconque *A* de sa circonférence, d'un rayon arbitraire *A B*, plus petit que le diamètre du cercle donné, et plus grand que le quart de ce diamètre, soit décrite la demi-circonférence *B C D E*, en faisant à *A B* $= BC = CD = DE$; soit *M* le point où elle coupe la circonférence du cercle donné; des centres *E* et *A* avec le rayon *EM*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *L*; du centre *L* et du même rayon *L A*, soit coupé le cercle *BME* en *Q*; des centres *B* et *A* et du rayon *B Q*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *O*; le point *O* sera le point cherché.

Démonstration. La ligne *B A E* étant droite (15. *liv.* 4), l'angle extérieur *L A B* est égal aux deux angles intérieurs opposés *A L E*, *A E L* pris ensemble, dans le triangle *A L E* (32. *liv.* 1). Or les triangles *L A E*, *L A Q* ont tous les côtés égaux entr'eux, et par conséquent les angles opposés aux côtés égaux sont aussi égaux (8. *liv.* 1). Donc l'angle *A E L* = *Q A L*, et l'angle *A L E* = *A L Q* : donc l'angle *L A B* est égal aux deux angles *Q A L* et *Q L A* pris ensemble; et retranchant de part et d'autre l'angle *Q A L*, on a l'angle restant *QAB*=*QLA*. Donc la somme des deux angles *L A Q*, *L Q A* dans le triangle *L A Q*, est égale à la somme des deux angles *A Q B*, *A B Q* dans le triangle *A B Q* (32. *liv.* 1). Mais ces deux triangles *L A Q*, *A B Q* sont isoscèles par construction : donc les angles à leurs bases seront égaux chacun à la demi-somme (5. *liv.* 1), et par conséquent égaux entr'eux dans l'un et l'autre triangle : donc les triangles *L A Q*, *A B Q* seront semblables (4. *liv.* 6), et on aura :

$$LA : AQ :: AQ : QB;$$

et substituant les valeurs égales,

$$ME : EA :: AB : OB:$$

donc les triangles isoscèles *M A E*, *A O B*

ayant les côtés proportionnels, sont équiangles entr'eux (5. *liv.* 6), et on a l'angle $OAB = AME = AEM$. Mais l'angle extérieur MAB est égal à la somme des deux angles intérieurs AME, AEM égaux entr'eux, dans le triangle AEM (32. *liv.* 1) : donc il sera égal à l'angle OAB pris deux fois ; ou bien on aura $OAB = OAM$. Mais les deux triangles OAB, OAM ont encore les côtés AB, AM égaux entr'eux, et de plus le côté OA commun, c'est-à-dire, ces deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux : donc (4. *liv.* 1) le troisième côté OB de l'un de ces triangles sera aussi égal au troisième côté OM de l'autre : donc les trois lignes OB, OA, OM sont égales, et par conséquent le point O est le centre que l'on cherchoit du cercle MAB (9. *liv.* 3).

144. Quand on a trouvé la valeur de QB, troisième proportionnelle aux deux lignes LA, AQ, ou aux deux lignes EM, EA, valeur qui est celle du rayon du cercle dont on cherche le centre, il suffit de prendre deux points à volonté dans la circonférence du cercle, et de ces points comme centres avec le même rayon, décrire deux arcs qui

se coupent ; le point de leur intersection sera le centre du cercle.

145. Pour obtenir des sections à angles moins aigus, il sera utile, dans la pratique, de choisir à vue d'œil un rayon *AB*, qui approche de la valeur du rayon du cercle que l'on cherche.

PROBLÈME.

146. *Circonscrire et inscrire un cercle à un triangle équilatéral donné* [fig. 72].

Solution. Soient *A*, *B* et *M* les sommets des angles du triangle donné ; du centre *A* et du rayon *AM*, soit tracé l'arc *MDE*, et soit fait à $AM = MD = DE$; des centres *B* et *A*, avec le rayon *BD*, soient tracés deux arcs qui se coupent en *L* ; du centre *L*, avec le même rayon *LA*, soit décrit un arc qui coupe l'arc *DE* en *Q* ; des sommets de deux angles du triangle, des points *A* et *B*, par exemple, pris pour centres, avec le rayon *QE*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *O* ; du centre *O* et du même rayon *OA*, soit décrit un cercle : il sera circonscrit au triangle.

Soit divisée la ligne *Q E* en deux parties égales au point *m* [66]; du même centre *O* et du rayon *Q m*, soit décrit un autre cercle; il sera inscrit au triangle.

Démonstration. De la démonstration du n.° 142, il résulte que la ligne *B A E* étant droite, *Q E* est troisième proportionnelle aux deux lignes *E M*, *E A*. Donc *Q E* sera le rayon d'un cercle qui passe par les trois points *M*, *A*, *B*; et le point *O* en sera le centre (143).

Dans la figure 59, où le cercle *D B d* est inscrit au triangle *N L M*, *A D* est perpendiculaire à *L D*, et *N A B* à *L B* (131): donc les triangles rectangles *N D A*, *N B L*, qui ont un angle commun en *N*, ont aussi le troisième angle égal (32. *liv.* 1); d'où on a la proportion (4. *liv.* 6):

$$NL : LB :: NA : DA.$$

Mais *N L* est double de *L B* : donc aussi *N A* est double de *D A*, c'est-à-dire, le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral, est double du rayon du cercle inscrit : donc, etc.

PROBLÈME.

147. *Circonscrire et inscrire un cercle à un quarré donné* [fig. 73].

Solution. Soient A, B, T, F les sommets des angles du quarré donné ; soit fait à $AB = AE$; à $FB = FE$; du centre B, avec le même rayon BF, soit décrit un arc qui passe par Q et q; du centre E et du rayon EA, soit coupé cet arc en Q et q; des centres Q et q, et du même rayon AE, soient décrits deux arcs qui se coupent en M; des centres A et B, et du rayon AQ, soient décrits deux arcs qui se coupent en O; du centre O et du même rayon OB, soit décrit un cercle ; il sera circonscrit au quarré ; du même centre O et du rayon OM, soit décrit un autre cercle : il sera inscrit au quarré.

Démonstration. Si on fait, pour abréger, $AB = 1$, on aura :

$$AQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ [104] = AO = BO;$$

on aura donc :

$$(AO)^2 + (BO)^2 = 1 = (AB)^2 :$$

d'où l'angle BOA sera droit (48. *liv.* 1), et les angles OAB, OBA seront égaux chacun à la moitié d'un angle droit (5, et 32. *liv.* 1) : de plus, l'angle BAF du quarré étant droit, l'angle OAF en vaudra la moitié : donc dans les deux triangles BAO, FAO, on aura un angle égal compris entre côtés égaux : d'où on aura aussi $OB = OF$ (4. *liv.* 1) ; on démontre

de la même manière que l'on a aussi $OB = OT$: donc le cercle $ABTF$ est circonscrit au quarré.

La ligne OM est perpendiculaire à MA [83] : donc BMA est tangente au cercle décrit avec le rayon OM; on démontre la même chose pour les autres côtés AF, FT, TB : donc le cercle décrit du centre O et du rayon OM est incrit au quarré.

PROBLÈME.

148. *Circonscrire et inscrire un cercle à un polygone régulier quelconque* [fig. 74].

Solution. Soient B, A, M les sommets de trois angles de ce polygone régulier, dont celui du milieu A soit également éloigné des deux autres B et M; du point A comme centre et du rayon AB, soit décrite la demi-circonférence $BCDE$ (64) ; des centres A et E, et du rayon ME soient décrits deux arcs qui se coupent en L; du centre L et du même rayon LA soit coupée la demi-circonférence $BCDE$ en Q : la ligne BQ sera le rayon du cercle circonscrit ; puis, des sommets B et A, par exemple, de deux des angles

du polygone comme centres, et du rayon *B Q* soient décrits deux arcs qui se coupent en *O;* le point *O* sera le centre de ce cercle.

Si *A B* est un côté du polygone, on le divisera en deux parties égales au point *T* (66), *O T* sera le rayon du cercle inscrit que l'on décrira du même centre *O;* si une autre ligne quelconque *A b* est un des côtés du polygone, on la divisera en deux parties égales au point *t*, et *O t* sera le rayon du cercle à inscrire avec le même centre *O*.

Démonstration. Il résulte de la démonstration du n.° 14, que *O* est le centre du cercle qui passe par les trois points *B, A, M:* donc il est le centre du cercle circonscrit, puisque par les trois points *B, A, M,* on ne peut faire passer qu'un seul cercle (25. *liv.* 3). On a ensuite *O T* perpendiculaire à *T A* [83] : d'où *T A* sera tangente au cercle décrit du centre *O* avec le rayon *O T* (16. *liv.* 1). La même démonstration s'applique à tous les autres côtés égaux à *A B :* donc ce cercle est inscrit au polygone qui a pour côté *A B ;* on démontre de même que le cercle décrit du centre *O*, et du rayon *O t,* est inscrit au polygone, qui a pour côté *A b*.

149. Si *A B* est un côté du polygone dans

lequel on veut inscrire le cercle, il y aura plusieurs manières de le diviser en deux parties égales (66); nous avons donné la plus simple pour le quarré (147) : pour le triangle seul (146), le rayon du cercle inscrit est la moitié du rayon du cercle circonscrit; dans le quarré seul, il est égal à la moitié du côté.

PROBLÊME.

150. *Trouver le centre* S [fig. 75] *d'un cercle qui passe par trois points donnés* P, Q, R.

Solution. Des points *P* et *Q* comme centres et d'un rayon arbitraire, soient décrits deux arcs qui se coupent en *A* et *B;* des centres *Q* et *R* et d'un rayon arbitraire, soient décrits deux arcs qui se coupent en *C* et *D :* le point *S* où les lignes *AB, CD* se coupent (112), sera le centre cherché.

Démonstration. Voyez (25. *liv.* 3).

GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE ONZIÈME.

PROBLÊMES DIVERS.

PROBLÊME.

151. *Étant donnée une échelle* SL, *trouver la surface du triangle* ABD, *et du quadrilatère* ABCD [fig. 76].

Solution. Faites à $BA = Ba$, et à $DA = Da$ [11]; portez sur l'échelle SL les distances Aa et BD prises avec le compas. Supposons, par exemple, que l'on trouve $Aa = 7$, $BD = 8$, multipliez ces deux nombres entr'eux; prenez le quart du produit $= 14$, ce nombre exprimera la surface du triangle ABD.

Pour trouver la surface du quadrilatère $ABCD$, après avoir déterminé le point a comme ci-dessus, on fera à $BC = Bc$ et à $DC = Dc$; on trouvera sur l'échelle les deux distances Aa, Cc; soit par exemple $Aa = 7$, $Cc = 5$; prenez la somme de ces deux quantités

tités = 12 ; multipliez par cette somme = 12 la valeur de *B D* trouvée sur l'échelle = 8 ; prenez le quart du produit = 24, ce nombre exprimera la surface du quadrilatère *A B C D*.

Démonstration. La ligne *A a* est double de la perpendiculaire qui tombe du point *A* sur la ligne *B D* (14) ; mais la surface du triangle *A B D* est égale à la moitié de la surface d'un parallélogramme qui auroit pour base la ligne *BD*, et pour hauteur cette perpendiculaire (41. *liv.* 1) : donc elle est égale au quart du produit de *A a* par *BD ;* de même la surface du triangle *B CD* est égale au quart du produit de *Cc* par *BD :* donc la surface du quadrilatère *ABCD* est égale au quart du produit de la somme des deux parallèles *A a*, *C c* par leur perpendiculaire *B D*.

152. Le problême précédent peut servir à mesurer la surface d'un espace renfermé par un polygone quelconque, en imaginant des droites qui le partagent en autant de triangles ou de quadrilatères que l'on jugera convenable ; on pourroit proposer encore d'autres manières de la réduire en trapèzes ; mais on peut facilement les déduire de la méthode avec laquelle on a résolu ce problême.

PROBLÊME.

153. *Etant donnés* [fig. 77] *les plans triangulaires qui comprennent une pyramide tétraèdre, trouver sur sa base le point où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet, et trouver sa hauteur.*

Solution. Soit le triangle *ABC* la base de cette pyramide tétraèdre, et soient *AEC*, *BDC*, *AFB* les plans triangulaires qui vont se réunir à son sommet; du centre *C* et du rayon *CD*=*CE*, soit décrit un arc qui passe par les points *e* et *d*; du centre *B* et du rayon *BD*, soit décrit un arc qui coupe le premier en *d*; du centre *A* et du rayon *AE*, soit décrit un arc qui coupe le rayon en *e*; soit trouvé le point *P* où se coupent les deux droites *Dd*, *Ee* [112]; ce point sera celui où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide.

Soit divisée par moitié la droite *CE* au point *m* [66]; du centre *m* et du rayon *mC*, soit décrite la demi-circonférence *CpE*; soit fait à *CP*=*Cp*; la ligne *Ep* sera la hauteur de la pyramide.

Démonstration. Si dans la pyramide *SABC* qui a pour base le triangle *A B C*, et pour sommet le point *S*, on mène dans le triangle *S C B* la droite *S* δ perpendiculaire à *C B*, et si on élève du point δ pris dans le plan de la base *A C B* la perpendiculaire δ *d*, elle contiendra le point *P*, où tombe du sommet la perpendiculaire *S P* [11. *liv.* 11]; de même, si du point *S* dans le plan *S A C*, on mène à *A C* la perpendiculaire *S* ε, et si du point ε dans le plan de la base *A CB*, on mène à la même droite *A C* la perpendiculaire ε *e*; elle contiendra le point *P* : donc ce point sera l'intersection des deux droites δ *d*, ε *e*. Mais dans la fig. 77, où les points *D* et *E* représentent le point *S* de la fig. 78, *D d* est perpendiculaire à *B C* en un point δ [14]; de même aussi *E e* est perpendiculaire à *A C* en un point ε : donc le point *P* est le point cherché.

De plus, les deux triangles *C P S* [*fig.* 78], *C p E* [*fig.* 77], étant rectangles en *P* et *p*, le premier par supposition, et le second par la 31.e prop. du liv. 3; et *C S* étant la même ligne que *C E*, on a $CP = Cp$; on aura encore $PS = pE$; car [*fig.* 78] (47. *liv.* 1) :

$$(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2;$$

de même on a [*fig.* 77] :

$$(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2.$$

Mais $(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2$: donc $(PS)^2 = (pE)^2$; d'où $PS = pE$; donc pE est la hauteur de la pyramide.

154. Jusqu'ici toutes les démonstrations que nous avons données étoient fondées sur les élémens d'Euclide. Mais comme nous ne pourrions pas toujours suivre la même marche sans être trop prolixes, nous emploierons quelques équations qui sont démontrées dans tous les traités de trigonométrie plane.

155. Si, dans un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité, on appelle x et y deux arcs quelconques, on aura :

$$\sin.(x+y) = \sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x.$$
$$\sin.(x-y) = \sin. x \cos. y - \sin. y \cos. x.$$
$$\cos.(x+y) = \cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y.$$
$$\cos.(x-y) = \cos. x \cos. y + \sin. x \sin. y.$$

156. Si dans la troisième équation l'on fait $x = y$, on aura :

$$\cos. 2x = (\cos. x)^2 - (\sin. x)^2;$$

et comme $(\cos. x)^2 + (\sin. x)^2 = 1$; d'où l'on tire : $(\cos. x)^2 = 1 - (\sin. x)^2$, on aura :

$$\cos. 2x = 1 - 2(\sin. x)^2;$$

d'où : $(\sin. x)^2 = \frac{1 - \cos. 2x}{2}$, et $\sin. x = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. 2x}{2}\right)}$.

157. Si l'on ajoute les deux premières équations [155], on aura :
$sin.(x+y)+sin.(x-y)=2\,sin.\,x\,cos.\,y$;
d'où $sin.\,x\,cos.\,y=\frac{sin.(x+y)+sin.(x-y)}{2}$.

Si l'on fait $(x+y)=p$, $(x-y)=q$, on aura : $2x=p+q$, $2y=p-q$:
d'où : $sin.\,p+sin.\,q=2\,sin.\left(\frac{p+q}{2}\right).cos.\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

158. Si l'on ajoute les deux dernières équations (155), on aura :
$cos.\,x\,cos.\,y=\frac{cos.(x+y)+cos.(x-y)}{2}$:
d'où : $cos.\,p+cos.\,q=2\,cos.\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos.\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

159. Si l'on retranche la 3.e des mêmes équations de la 4.e, on aura :
$sin.\,x\,sin.\,y=\frac{cos.(x-y)-cos.(x+y)}{2}$.
d'où $cos.\,q-cos.\,p=2\,sin.\left(\frac{p+q}{2}\right).\,sin.\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

160. A cause de l'équation $2\,sin.\,x=corde\,2x$, on aura (156) :
$$corde\ 2x=2\sqrt{\frac{1-cos.\,2x}{2}}.$$
et si l'on suppose $2x=x$, on aura :
$corde\ x=2\sqrt{\frac{1-cos.\,x}{2}}=\sqrt{(2-2\,cos.\,x)}$.

Si l'on appelle k la corde d'un arc, c le cosinus, s le sinus, h la corde du complé-

ment, on aura : $k^2 = 2 - 2c$, et $h^2 = 2 - 2s$.

La première de ces deux équations donne $c = 1 - \frac{1}{2}k^2$; et comme on a :
$s = \sqrt{(1 - c^2)} = \sqrt{(k^2 - \frac{1}{4}k^2)} = k\sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$,
on aura : $h^2 = 2 - 2k\sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$.

PROBLÈME.

161. *Dans un triangle équilatéral* ABC [fig. 79], *inscrire un quarré* e b c d [fig. 124].

I.ere *Solution.* Si on veut se servir des côtés donnés du triangle, soit décrit du centre *A*, et avec le rayon *AB*, le demi-cercle *BCDE* [64].

Du centre *E* et avec le rayon *EC*, soit décrit un arc qui coupe le côté donné *AB* en *b*; du centre *A* et avec le rayon *Bb*, soit décrit un arc qui coupe le même côté en *e*; des centres *e* et *b*, et avec le rayon *eb*, soient décrits deux arcs qui coupent les côtés *AC* en *d*, et *CB* en *c*; *ebcd* sera le quarré cherché.

Démonstration. Faisant pour abréger $AB = 1$, on aura $Eb = EC = BD = \sqrt{3}$ [2]; d'où : $Bb = BE - Eb = 2 - \sqrt{3} = Ae$; d'où on tire : $be = AB - 2Ae = 2\sqrt{3} - 3 = (2 - \sqrt{3}).\sqrt{3} = bc$; donc on aura :

$Bb : bc :: (2-\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3}) . \sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}$.

Mais si on suppose que *A B* soit coupée au milieu en *T* par la perpendiculaire *C T*, on aura aussi :

$$BT : TC :: \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ [104];$$

c'est-à-dire, $BT : TC :: 1 : \sqrt{3}$:
donc *b c* est parallèle à *T C* [2. *liv.* 6], et par conséquent perpendiculaire à *A B* [27. *liv.* 1] : on démontreroit la même chose pour la droite *d e* : donc *e b c d* est le quarré inscrit.

IIe *Solution.* Si on ne vouloit pas se servir de l'intersection des côtés donnés du triangle *A B C*, mais qu'étant donnés seulement les trois points *A*, *B* et *C* sommets des angles du triangle, on dût trouver les quatre points *b*, *c*, *d*, *e* du quarré à inscrire ; du centre *E*, comme dans la solution précédente, et avec le rayon *EC*, soit décrit un arc qui passe par *b*, *C* et *a* ; du centre *B*, et avec le même rayon, soit décrit un arc qui coupe en *a* celui qu'on vient de tracer ; du centre *a*, et avec le rayon *A B*, soit coupée la demi-circonférence *B CDE* en *H* ; et soit fait dans cette circonférence à *Ha* $= HI = IK$; du centre *D* et avec le rayon *aK*, soit décrit un arc qui passe par *b* ; le point *b* sera déterminé ; du centre *A* et du rayon *B b*, soit décrit un arc qui passe par le point *e*; du centre *C* et du rayon *C b*, soit dé-

crit un autre arc qui coupe le dernier en e; des centres e et C, et du rayon be, soient décrits deux arcs qui se coupent en d; des centres b et C, avec le même rayon be, soient décrits deux arcs qui se coupent en c; $bcde$ sera le quarré cherché.

Ou bien en employant le cercle $BCDE\delta$, et faisant à $AB = E\delta$; des centres D et δ, et avec le rayon aK déterminé plus haut, soient décrits deux arcs qui se coupent en b; le reste se fait comme ci-dessus.

Démonstration. Le point K sera ici déterminé comme dans la fig. 9 (32) par le moyen du même point a, ainsi l'arc BK sera un vingt-quatrième de la circonférence. On a ensuite dans la fig. 9, $BK = Bk = EM$; si on compare les points a, K, B, k, A, M avec les points Q, A, R, S, p, B de la fig. 4, on tirera pour la fig. 9, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS.pQ \; [20]$$

celle-ci : $(aK)^2 = (Ba)^2 - Kk.Aa$:
or Kk est la corde d'un douzième de la circonférence. Pour trouver sa valeur, en supposant pour abréger $AB = 1$, on a le sinus de $BN = Kk = AX$ [*fig.* 12] $= \frac{1}{2}$, et le double de son cosinus, c'est-à-dire, $2NX = NO = BD = \sqrt{3}$: d'où substituant Kk pour x,

et $\sqrt{3}$ pour 2 *cos. x*, dans l'équation [159]:

$$corde\ x = \sqrt{(2 - 2\cos. x)},$$

on aura la droite $Kk = \sqrt{(2-\sqrt{3})} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$;
d'où : $(aK)^2 = 3 - (\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) \cdot \sqrt{2}$ [27]

$$= 3 - (\sqrt{3} - 1) = 4 - \sqrt{3}.$$

Maintenant, si des centres D et δ, et avec le rayon aK, on décrit deux arcs qui se coupent en b, le point b sera sur la droite BE[13], qui divisera en deux parties égales à angles droits la ligne $D\delta$ au point R [14], en faisant, $RD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ [104] : donc, puisque [47. *liv.* 1] :

$$(Db)^2 = (DR)^2 + (bR)^2:$$

on aura : $(bR)^2 = (Db)^2 - (DR)^2$

$$= 4 - \sqrt{3} - \tfrac{3}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4};$$

et de-là : $bR = \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}$, et $bE = \sqrt{3}$.
Donc par la démonstration de la solution, le point b est une des extrémités du quarré : on le trouvera de même avec les centres D et E, et avec les deux rayons aK et BD comme dans la première partie de la II.[e] solution ; puis les deux triangles CAe, CBb ayant tous leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle $CBb = CAe$ [8. *liv.* 1] $= CBA$; d'où le point e sera sur la ligne BA et sera une autre extrémité du quarré. Enfin, comme dans cette seconde solution les droites Cb, Ce sont les mêmes de grandeur et de position

que dans la première solution, et qu'on a aussi dans la première solution $Cd = ed$, $Cc = bc$ à cause du triangle équilatéral Ccd et de la ligne cd parallèle à AB [2. *liv.* 6], les points d et c seront déterminés dans cette seconde solution comme dans la première.

PROBLÈME.

162. *Inscrire dans le quarré* ABLF [fig. 80] *un triangle équilatéral, qui a un angle* B *à l'un des angles du quarré.*

I.ere *Solution.* Du centre A et du rayon AB, soit décrite la demi-circonférence BFE, en faisant à $FB = FE$; soit fait aussi à $BE = BQ = EQ$: si on veut se servir des sections des côtés donnés du quarré; du centre F et du rayon FQ, soit décrit un arc qui coupe deux côtés du quarré aux points M et N, les points B, M, N seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'angle QAB étant droit (83), on aura :

$$(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 \text{ [47. liv. 1]};$$

et faisant pour abréger $AB = 1$, on aura :

$$4 = 1 + (AQ)^2;$$

d'où : $AQ = \sqrt{3}$; $FQ = AQ - AF$
$= \sqrt{3} - 1 = FM = FN$;

d'où : $(FM)^2 = (FN)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$;
et par conséquent,
$(MN)^2 = (FM)^2 + (FN)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$;
ensuite comme on a :
$LM = LF - FM = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$;
on aura : $(LM)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$; d'où :
$(BM)^2 = (BL)^2 + (LM)^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (MN)^2$:
on démontre de même que $(BN)^2 = (MN)^2$;
donc : $BM = MN = BN$.

II.e *Solution.* Si on ne suppose données que les quatre extrémités *A*, *B*, *L*, *F* du quarré, après avoir trouvé comme dans la première solution le point *Q*, soit décrite du centre *F*, et avec le rayon *FQ*, la circonférence *QRSNM*; puis faisant à $FQ = QR = RS = SN$, du centre *B* et avec le rayon *BN*, soit coupée cette circonférence au point *M*; les points *B*, *N*, *M* seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'arc *QRSN* est la moitié de la circonférence (15. *liv.* 4) : donc le point *N* est sur la droite *QFA*, et est aussi éloigné de *F* que dans la première solution; donc il est le même. Le point *M* se trouve aussi dans la première solution, comme dans la seconde, à l'intersection des deux arcs décrits des centres *F* et *M* et avec des rayons égaux à *FQ* et à *BN*; donc il est le même; donc, etc.

PROBLÈME.

163. *Dans un triangle équilatéral dont les sommets* p, q, R *sont donnés, inscrire un exagone régulier.*

Solution. Divisez la distance *QR* [*fig.* 81] en trois parties égales aux points *c* et *d* (68); des centres *c* et *d*, et du rayon *c d*, décrivez deux arcs qui se coupent en *A*, du même rayon et du point *A* pris pour centre, décrivez un cercle, faites sur la circonférence à *dc* = *c B* = *B C* = *CD* = *D E*; les points *B*, *C*, *D*, *E*, *d*, *e*, seront les sommets de l'exagone inscrit.

Démonstration. Le triangle *B c Q* a ses côtés *B c* et *Q c* égaux aux côtés *A d* et *c d* du triangle *A dc*: de plus, l'angle compris entre ces côtés est égal dans chaque triangle à cause du parallélisme des lignes *B c* et *A d* [27. *liv.* 1): donc ces deux triangles sont égaux (4. *liv.* 1), et l'angle *c Q B* = *dc A* = *c Q P*: donc le point *B* est sur la droite *P Q*: on démontre de la même manière, que les autres points *C*, *D*, *E* sont sur les côtés du triangle proposé: donc, etc.

PROBLÈME.

164. *Dans un quarré donné* ABLF, *inscrire un octogone régulier.*

I.ere *Solution*. Si l'on veut se servir des intersections des côtés du quarré donné, du point *A* pris pour centre [*fig.* 82], et du rayon *AB*, décrivez la demi-circonférence *BCDE*, en faisant à *AB* = *BC* = *CD* = *DE*; faites à *BF* = *BQ*, à *EA* = *EQ*; du rayon *AQ*, et du centre *A*, déterminez les points *b* et *g*; puis du même rayon et des centres *B*, *L* et *F*, coupez les côtés aux points *a*, *d*, *c*, *f*, *e*, *h*, ces points seront les sommets de l'octogone *abcdefgh*.

II.e *Solution*. Ayant déterminé le point *Q* comme dans la première solution, du rayon *AQ* et des points *A* et *B* pris pour centre, décrivez deux arcs qui se coupent en *O*; avec le même rayon et du centre *A*, déterminez le point *b* sur le côté *AB*; du point *O* pris pour centre, et du rayon *Ob*, décrivez un cercle qui coupe les côtés du quarré dans les autres points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *a*; ces points seront les sommets de l'octogone.

III.e *Solution*. En supposant que les côtés du quarré ne soient pas donnés, mais que l'on

connût seulement les quatre sommets A, B, L, F, on déterminera le point Q comme dans la première solution; on fera à $EC = EM$, à $BF = BM$: du rayon AM et du centre A, décrivez un arc qui passe par les points c et d; du même rayon et du centre B, décrivez un arc qui passe par les points f et g; du même rayon et du centre L, décrivez un arc qui passe par les points h et a; du même rayon et du centre F, décrivez un arc qui passe par les points b et c; du rayon AQ et des centres A, B, L, F, coupez ces arcs aux points b, g, d, a, c, f, e, h; ces points seront les sommets de l'octogone.

Démonstration. Supposons pour plus de simplicité $AB = 1$, on aura : $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ [104]; $AQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, et au moyen de l'équation $(Bd)^2 = (AQ)^2 = \frac{1}{2}$, on aura : $(Ad)^2 = (AM)^2 = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2} = (AB)^2 + (Bd)^2$: donc l'angle ABd sera droit (48. *liv.* 1), et par conséquent le point d sera sur la droite BL : on démontrera de la même manière que tous les autres points sont sur les côtés du quarré proposé ; on aura de plus $Ld = BL - Bd = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = Le$, et $(de)^2 = (Ld)^2 + (Le)^2$ [47. *liv.* 1] $= 2(Ld)^2$: d'où l'on tire : $de = Ld.\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$. Mais on a $cd = BL - Ld - Bc = BL - 2Ld = 1 - 2 + \sqrt{2}$

$= \sqrt{2} - 1$: donc $cd = de$; on démontrera de la même manière que tous les côtés de l'octogone sont égaux entr'eux. De plus, les triangles Lde, Bbc, Aah, Ffg étant égaux en tout, leurs angles aux points a, b, c, d, e, f, g, h seront égaux : donc leurs supplémens, c'est-à-dire, les angles de l'octogone seront aussi égaux (13. *liv.* 1).

PROBLÊME.

165. *Etant donné un octogone régulier* ABhgfFGH, *trouver facilement* [fig. 66], 1.° *le côté d'un octogone régulier dont la surface soit double;* 2.° *le côté d'un octogone dont la surface soit triple.*

Solution. Avec le côté AB de l'octogone donné, pris pour rayon, des points F et H comme centres, soient décrits deux arcs qui se coupent en a.

1.° af ou aA sera le côté de l'octogone double.

2.° AB ou ag sera le côté de l'octogone triple.

Démonstration. Si on suppose $AB = 1$, on aura :

$aA = af = \sqrt{2}$ [139]; $aB = ag = \sqrt{3}$ [2] :

mais les surfaces des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues (20. *liv.* 6) : donc aA sera le côté d'un octogone double et AB celui d'un triple.

PROBLÈME.

166. *Dans un cercle d'un rayon* AB [fig. 83], *inscrire trois cercles qui le touchent et se touchent entr'eux.*

Solution. Dans la circonférence du cercle donné, soit fait à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; du centre B et du rayon BD, soit décrit un arc qui passe par les points a, p, et α : du centre E et du même rayon BD, soit coupé cet arc en a et α; avec le même rayon, des centres C et c, soient décrits deux arcs qui se coupent en V, et des centres D et d, deux autres arcs qui se coupent en v; des centres V et v, et avec le même rayon, soient décrits deux arcs qui passent par m et n; des centres a et α et du rayon AB, soit coupée la circonférence du cercle donné en G, H, et en g, h; soit fait dans cette circonférence au même rayon $AB = GL = HI = gl = hi$; soit fait à $Aa = BF$; à $IL = LY = IY = ly = iy$; à $Yy = Fm = Fn$; à $Dn = Dp$: du centre A

A et du rayon *mn*, soit décrit le cercle *PSRXQT*, sur la circonférence duquel, prenant un point arbitraire *P*, on fasse à $PA = PS = SR = RX = XQ = QT$: enfin, des centres *P*, *Q*, *R* et du rayon *pn*, soient décrits trois cercles ; ils seront tangens au cercle donné, et tangens entr'eux.

Démonstration. La droite *IL* étant corde d'un douzième de la circonférence (32), on aura :

$$IL = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}\ [160];$$

et comme on a (47. *liv.* 1. 31. *liv.* 3) :
le carré du diamètre $(Li)^2 = (IL)^2 + (Ii)^2$,
on aura : $4 = 2 - \sqrt{3} + (Ii)^2$;
d'où : $(Ii)^2 = 2 + \sqrt{3}$, et $Ii = \sqrt{(2 + \sqrt{3})}$.
On aura ensuite (20) :
$(aI)^2 = (aB)^2 - Ii \,.\, Aa = 3 - \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})}$
$= 3 - (1 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$;
d'où $aI = IL = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$;
on aura par les mêmes raisons $aL = LI$;
d'où *aIYL* sera un rhombe, et on aura (139) :

$$(aY)^2 = 4(aI)^2 - (IL)^2 = 3(IL)^2;$$

d'où : $aY = IL \,.\, \sqrt{3}$: mais les points *I* et *L* étant également éloignés du point *A*, les trois points *a*, *Y*, *A* seront dans la même droite (13) ; d'où :
$AY = Aa - aY = \sqrt{2} - \sqrt{(6 - 3\sqrt{3})}$
$= \sqrt{2} - (3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = IL.$

La même démonstration s'applique à la ligne Ay; ensuite le point y étant sur la ligne $a\alpha$, c'est-à-dire, sur aA (13), on aura $Yy = 2AY$: or les points V, B, A, E, v sont dans la même droite (13). Si on suppose pour un moment que les points m, n soient dans la même droite, on aura :

$$Am = AV - Vm = 2 - \sqrt{3}.$$

En effet, si on compare les points C, c, V, B, A, E avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on aura dans cette fig. 83 : $VB = AE$ (14) : d'où $AV = 2$ et $Vm = \sqrt{3}$; on démontrera de même qu'on a $An = 2 - \sqrt{3}$; d'où on aura : $(Fm)^2 = (Am)^2 + (AF)^2$ (47. *liv.* 1)

$$= 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(2 - \sqrt{3});$$

d'où : $Fm = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 2AY$;

de plus on a, par la construction de la figure :

$$Fn = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})};$$

donc le point m sera dans la droite VA : on démontrera la même chose pour le point n : donc, puisque $Am = 2 - \sqrt{3}$, on aura : $mn = 4 - 2\sqrt{3}$; puis les triangles BpD, vnD ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $Dvn = DBp$ (8. *liv.* 1). Mais l'angle Dvn qui est le même que l'angle DvB, étant égal à l'angle DBV (5. *liv.* 1), on aura l'angle $DBp = DBv$: donc le point p est dans la droite AE; on a ensuite $Dn = Dp$: on dé-

montre de même que $dn = dp$: donc comparant les points D, d, A, n, p, E de la fig. 83, avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on trouvera [*fig.* 83] :

$$pE = An = 2 - \sqrt{3}\,;\text{d'où :}$$

$$pn = AE - 2An = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

De plus, le triangle équilatéral PQR étant semblable au triangle équilatéral BDd, et par conséquent aussi le triangle ABD semblable au triangle APR (20. *liv.* 6), on aura :

$$AB : BD :: AP : PR\,;$$

c'est-à-dire,

$$1 : \sqrt{3} :: 4 - 2\sqrt{3} : PR\,;$$

d'où on tire : $PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2pn$.

Donc la ligne PR étant coupée par moitié au point p, le point p se trouvera également sur les deux circonférences des cercles décrits des centres P et R, et sera le point de contact (12. *liv.* 3) ; qu'on ajoute ensuite à la droite $AR = mn = 4 - 2\sqrt{3}$, le rayon du cercle décrit du centre R, ou bien la droite $Rr = np = 2\sqrt{3} - 3$, on aura :

$$Ar = 4 - 3 = 1 = AB.$$

Donc le point r sera également sur les deux circonférences, et le cercle décrit du centre R touchera intérieurement le cercle donné (11. *liv.* 3) ; on démontrera la même chose pour les autres cercles ; donc, etc.

Ce problême se trouve élégamment résolu avec la règle et le compas, par Thomas Simpson, dans son ouvrage : *Select Exercises, etc. Géometrical Problems, problême* 13 : on voit qu'on peut par notre construction résoudre ce problême avec la règle et le compas plus briè-vement encore que ne le fait Simpson, en menant la droite *Vav*, et après y avoir pris à $AB = BV = Ev$, en faisant à $BD = Vm = Bp = vm$; puis en décrivant du centre *A* et du rayon *mn* le cercle *PQR*, et faisant tout le reste de la construction comme dans la solution précédente.

PROBLÊME.

167. *Du centre* A [fig. 83], *décrire un cercle qui touche extérieurement les trois cercles inscrits par le problême précédent* (166) *à un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites *AB*, *Am* [86]; avec cette ligne prise pour rayon et du centre *A*, soit décrit un cercle; ce sera le cercle cherché.

Démonstration. AB étant $=1$, et $Am = 2 - \sqrt{3}$, on aura la troisième proportionelle $= 7 - 4\sqrt{3}$. Si maintenant du rayon $Ar = 1$,

on soustrait le diamètre qr du cercle décrit du centre R, c'est-à-dire, si on soustrait $2np = 4\sqrt{3} - 6$, on aura précisément $7 - 4\sqrt{3}$: donc un cercle décrit du centre A et avec cette troisième proportionnelle pour rayon, sera tangent au point q à ce cercle inscrit (12. *liv.* 3), et aux deux autres cercles.

PROBLÈME.

168. *Inscrire dans un cercle d'un rayon donné* AB [fig. 84], *quatre cercles qui lui soient tangens, et qui soient tangens entr'eux.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à $AB = BC = CD = DE$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF = Bf$; à $AB = FN = FO$; et à $BD = NP = OP$; du centre A et du rayon aP, soit décrit le cercle $QRST$; puis prenant un point arbitraire Q sur la circonférence, soit fait à $BQ = FR = ES = fT$; enfin des centres Q, R, S, T, et du rayon aF, soient décrits quatre cercles : ils seront les cercles demandés.

Démonstration. Comme on a (27) :

$$BF = FE = Ef = fB,$$

on aura aussi (93) :

$$QR = RS = ST = TQ:$$

donc l'angle TAQ sera droit ; donc :

$$(TQ)^2 = (AT)^2 + (AQ)^2 = 2\,(AT)^2;$$

puis ayant fait $AB = 1$, on aura aussi (165) : $FP = 1$; d'où : $AP = 2$; on aura encore (27) : $Aa = \sqrt{2}$; d'où : $aP = 2 - \sqrt{2}$; $aF = \sqrt{2} - 1$; d'où on tire :

$$2(AT)^2 = 2\,(aP)^2 = (TQ)^2 = 2\,(2 - \sqrt{2})^2;$$

et

$$TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) = 2\,aF:$$

donc la distance des deux centres T et Q est égale à la somme des rayons des deux cercles décrits de ces points comme centres : donc ils sont tangens en p au milieu de TQ. On prouveroit la même chose pour deux autres quelconques. Soit ensuite r le point, où la ligne Ar prolongée coupe le cercle décrit du centre R, on aura :

$$Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB:$$

donc le point r sera sur la circonférence du cercle donné ; d'où on voit que la ligne Ar passant par les deux centres A et R, sera perpendiculaire à la tangente qui les touche tous deux au point r : donc ils seront tangens entr'eux (13 et 16. *liv.* 3) ; la même démonstration s'applique aux autres cercles.

PROBLÈME.

169. *Du centre* A (fig. 84), *décrire un cercle qui touche les quatre que l'on vient d'inscrire* (168) *dans un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites FP, Fa [86]; avec cette ligne prise pour rayon et du centre A, soit décrit un cercle, il sera le cercle cherché.

Démonstration. PF étant égal à 1, et $Fa = \sqrt{2} - 1$, on aura la troisième proportionnelle $= 3 - 2\sqrt{2}$; or soit q le point où le rayon Ar coupe le cercle décrit du centre R: qr en sera le diamètre $= 2aF = 2\sqrt{2} - 2$; soustrayant de $1 = Ar$ cette valeur, on aura: $Aq = 3 - 2\sqrt{2} =$ cette troisième proportionnelle: donc le point q sera dans les deux circonférences; mais il se trouve dans la droite AR; donc la perpendiculaire à cette droite sera tangente en q, aux deux cercles, lesquels se toucheront au point q (13 et 16. *liv.* 3); on démontrera la même chose pour les autres cercles.

PROBLÈME.

170. *Trouver* [fig. 85] *un arc de cercle dont le cosinus égale la corde.*

Solution. D'un rayon AB qu'on fait $= 1$, soit décrit l'arc $BCDE$, et soit fait à $AB = BC = CD = DE = DP = CP$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$, et à $Aa = BF$: du centre B, et du rayon PF, soit décrit un arc qui coupe l'arc BC en Q; l'arc BQ sera celui que l'on cherche.

Démonstration. Les points A, F, a, P sont dans la même droite (13); puis les points B, A, D, P étant tous éloignés du point C de la distance CB, sont dans la circonférence d'un cercle qu'on décriroit du centre C et du rayon CB: comme on a de plus à $CB = BA = AD = DP$, BCP sera le diamètre de ce cercle (15. *liv.* 6), et on aura $PA = \sqrt{3}$ [2]; d'où :

$$PF = \sqrt{3} - 1 = BQ:$$

si maintenant on abaisse sur AB la perpendiculaire QR, on aura (13. *liv.* 2) :

$$(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 - 2\,AB.AR;$$

c'est-à-dire :

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 2 - 2\,AR;$$

d'où : $AR = \sqrt{3} - 1 = BQ$;

ainsi qu'on s'étoit proposé de le faire. Ces derniers problêmes sont d'Ozanam, qui les a résolus avec la règle et le compas.

PROBLÊME.

171. *Etant donnés les axes* BE, MN *d'une hélice, décrire autour d'eux un ovale composé de cercles qui soient tangens entr'eux.*

Solution. Du centre A où les axes se coupent et du rayon AB qui est la moitié du plus grand axe, soit décrite la demi-circonférence BDE, et soit fait à $EA = ED$; du centre B et du rayon BD, soit coupé l'axe BE en d: du centre A et du rayon AM, soit coupé le demi-axe AE en m; du même centre A et du rayon Ad, soit décrit l'arc de, et soit fait à $Em = de$; des centres d et e et d'un rayon pris arbitrairement, soit coupé l'arc BDE en δ et ϵ; du centre A et du rayon $\delta\epsilon$, soit coupé l'axe BE en P et Q; des centres P et Q et du rayon $PB = QE$, soient décrits les arcs FBf, GEg, et soit fait à $PB = BF = Bf = EG = Eg$; soit fait ensuite à $PQ = PR = Pr = QR = Qr$; puis du centre R et du rayon RF, soit décrit l'arc FG qui passera par M: enfin

du centre r et du rayon $RF = rf$, soit décrit l'arc fg qui passera par N, et toute la construction sera faite.

Démonstration. Les triangles BFP, PQR étant équilatéraux, les angles BPF, QPR seront égaux (8. *liv.* 1); et les deux lignes FP, PR formeront une seule droite, parce que les deux angles $FPA + APR$ sont égaux aux deux angles $FPA + APN$ (13 et 14. *liv.* 1) : donc les deux arcs BF, FG seront tangens l'un à l'autre en F (13. *liv.* 3) : la même démonstration s'applique aux points de contact f, G, g.

Soit fait ensuite pour abréger $AB = 1$, on aura : $BD = \sqrt{3}$ [2] $= Bd$; d'où :

$$Ad = \sqrt{3} - 1;$$

et comme on a [93] :

$$Ad : de :: A\delta : \delta\varepsilon.$$

On aura encore en multipliant les deux termes du premier rapport par $\sqrt{3}+1$ (4. *liv.* 5) : $Ad(\sqrt{3}+1) : de(\sqrt{3}+1) :: A\delta : \delta\varepsilon$; puis substituant les valeurs numériques de Ad et $A\delta$, et exécutant la multiplication dans le premier terme, on aura :

$$2 : de(\sqrt{3}+1) :: 1 : \delta\varepsilon;$$

d'où :

$$2\delta\varepsilon = 2AP = de(\sqrt{3}+1) = PQ = PR.$$

De plus, $PRQr$ étant un rhombe, on

aura (139) :

$(Rr)^2 = 4(PR)^2 - (PQ)^2 = 3(PR)^2$;

d'où :

$$Rr = PR \,.\, \sqrt{3} = de(3 + \sqrt{3});$$

et $RA = \frac{1}{2} de(3 + \sqrt{3})$.

On a ensuite :

$AM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de$;

d'où : $RA + AM = 1 + \frac{1}{2} de(1 + \sqrt{3})$;

ou bien : $RM = 1 + \frac{1}{2} PR$;

et comme on a :

$PF = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} PR$,

on aura :

$PF + PR = 1 + \frac{1}{2} PR$, c'est-à-dire, $FR = RM$.

Donc l'arc FG passera par M : on feroit voir de même que l'arc fg passe par n : donc, etc.

PROBLÈME.

172. *Décrire* [fig. 87] *une spirale* BLEMFNGPH, *composée de plusieurs arcs de cercle.*

Solution. Soit $BE = BF$ la distance qu'on veut donner aux révolutions de cette spirale ; après avoir divisé BE en deux parties égales au point A (66) ; de ce point comme centre et d'un rayon AB, soit décrite la

demi-circonférence *BLE* (64); du centre *B* et du rayon *BE*, soit décrite la demi-circonférence *EMF*; soit encore décrite du centre *A*, et avec le rayon *AF* la demi-circonférence *FNG*; soit encore décrite du centre *B*, et avec le rayon *BG* la demi-circonférence *GPH*, on pourroit ainsi continuer cette spirale à l'infini.

On pourra de la même manière doubler cette spirale, en décrivant des centres *A* et *B* alternativement les demi-circonférences *ble*, *emf*, *fng*, *gph*, etc.; après avoir pris le point *b* à une distance arbitraire de *B* sur la ligne *AB* (73).

Ce problême n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÊME.

173. *Trouver* $\sqrt{\sqrt{2}}$ *et* $\sqrt{\ \ 3}$.

Solution. Avec le rayon $AB=1$, et du centre *A*, décrivez (*fig.* 88) la demi-circonférence *BCDE*, en faisant à $AB=BC=CD=DE$; puis faites à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BP$; à $AB=EP$; marquez sur la demi-circonférence les points *H*, *I*, *K*, en faisant à la même ligne $AB=aH=HI=IK$.

Des centres *E* et *H*, et du rayon *AP*,

soient décrits deux arcs qui se coupent en *L* et *M*; on aura : $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Des centres *a* et *K*, avec le rayon *AB*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *Q* et *R*; on aura $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Démonstration. *ELHM* étant un rhombe, on aura (139) :

$(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (AE)^2$.

Mais,

$(AP)^2 = \frac{1}{2}$ [104], $(HE)^2 = 2 - \sqrt{2}$ [30 et 36] : donc $(LM)^2 = \sqrt{2}$; d'on on tire : $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

aQKR étant aussi un rhombe, on aura également :

$$(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2.$$

Mais $(AQ)^2 = (AB)^2 = 1$; $(aK)^2 = 4 - \sqrt{3}$ [160] : donc $(QR)^2 = \sqrt{3}$; d'où on tire : $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

174. On pourroit, par de semblables artifices, obtenir les racines quatrièmes des autres nombres entiers, sans employer la méthode de trouver les moyennes proportionnelles (99). Pour avoir $\sqrt{\sqrt{2}}$ par cette méthode, on auroit eu à trouver une moyenne proportionnelle entre 1 et $\sqrt{2}$, ou entre $\frac{1}{2}$ et $2\sqrt{2}$, ou entre deux autres quantités qui, multipliées l'une par l'autre, fussent égales à $\sqrt{2}$. Mais cette marche seroit beaucoup plus compliquée.

En cultivant cette géométrie du compas,

on en retirera de très-grands avantages. J'ai sur cette matière d'autres recherches toutes prêtes qui pourront trouver place dans un ouvrage plus étendu que celui-ci. Voici une application du problême précédent relative à la pyramide tétraèdre régulière.

PROBLÊME.

175. *Etant donné le côté* AB *d'une pyramide tétraèdre régulière* SABC [fig. 89], *trouver*, 1.° *sa hauteur;* 2.° *le côté d'un quarré qui lui soit égal en surface;* 3.° *le côté du quarré, sur lequel il faudroit construire une pyramide qui eût pour hauteur le côté de celle proposée, pour qu'elle lui fût égale en solidité;* 4.° *le côté du quarré sur lequel il faudroit construire une pyramide de hauteur égale à celle de la pyramide proposée, pour qu'elle lui fût aussi égale en solidité;* 5.° *le rayon d'une sphère circonscrite.*

Solution. La figure 88 étant construite avec

le rayon *AB*, comme dans le problême 173, du centre *B* et du rayon *Ba*, soit décrit l'arc *aN*, et soit fait à $Aa = EN$; des centres *A* et *E*, avec le rayon *AN*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *n*; du même rayon *nA*, coupez la demi-circouférence *BCDE* au point *S*. Enfin divisez en deux parties égales *LM* au point *m* (66), ainsi que *QR* en *q*. 1.° *BS* sera la hauteur de la pyramide; 2.° *QR* sera le côté du quarré qui lui est égal en surface; 3.° *Mm* sera le côté du quarré qui forme la base d'une pyramide de hauteur égale au côté de celle proposée, et qui lui est égale en solidité; 4.° *Qq* sera le côté du quarré qui sert de base à une pyramide égale en hauteur et en solidité à celle proposée; 5.° *AN* est le diamètre d'une sphère circonscrite.

Démonstration. Si du sommet *S* de la pyramide on abaisse une perpendiculaire *Sm* sur le côté *AB*, à cause du triangle équilatéral *SAB*, elle coupera par moitié au point *m* la droite *AB* (12. *liv.* 1). Donc si, sur la base *ABC*, on élève au point *m* de la droite *AB* la perpendiculaire *mT*, elle passera par *C* (11. *liv.* 1), et contiendra le point *T* où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet *S* sur la base (11. *liv.* 11).

On démontre de même que le point T est dans la droite Bn, qui divise en deux parties égales le côté AC. Soit menée la droite mn, elle sera parallèle à BC (2. *liv.* 6), et le triangle Amn sera équiangle au triangle ABC (27. *liv.* 1), et BC sera double de mn (4. *liv.* 6); puis les triangles BCT, mnT auront les angles égaux chacun à chacun, et on aura (4. *liv.* 6) :

$$BC : mn :: CT : mT.$$

Donc CT est double de mT; d'où $mT = \frac{1}{3} Cm$; puis faisant $AB = 1$, on a $Cm = Sm = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ [104] : donc $Tm = \frac{1}{6} \sqrt{3}$. De plus, comme on a :

$$(Sm)^2 = (mT)^2 + (ST)^2 \text{ [47. liv. 1]};$$

c'est-à-dire, $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + (ST)^2$;

on aura : $(ST)^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; d'où $ST = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On a ensuite (*fig.* 88) :

$$AN = \frac{1}{2} \sqrt{6} \text{ [104]} = \sqrt{\tfrac{6}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = An:$$

on a aussi (*fig.* 89) :

$$An : AS :: AS : SB \text{ [86]};$$

c'est-à-dire, $\sqrt{\frac{3}{2}} : 1 :: 1 : SB$;

d'où on a : $SB = \sqrt{\frac{2}{3}} = ST$; ce qu'il falloit 1.° démontrer.

Ensuite la surface de la pyramide tétraèdre est égale au quadruple de la surface de la base ABC [*fig.* 89]; laquelle étant égale à $\frac{1}{2} AB \cdot Cm = \frac{1}{4} \sqrt{3}$ [41. *liv.* 1], sera la surface

surface de la pyramide $=\sqrt{3}$; d'où le côté du quarré qui lui est égal $=\sqrt{\sqrt{3}}$. Mais on a (*fig.* 88) : $QR=\sqrt{\sqrt{3}}$ [173] : donc QR est le côté du quarré cherché. C. Q. F. 2°. D.

Dans les pyramides égales, les bases étant en raison inverse des hauteurs (9. *liv.* 12), on aura :
$1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: \frac{1}{4}\sqrt{3}$: à la base de la pyramidequi a pour hauteur $AB=1$; d'où la surface de cette base $=\frac{1}{4}\sqrt{2}$, et le côté du quarré de cette surface $=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}}=Mm$ [173]. C. Q. F. 3°. D.

Les pyramides de hauteur égale étant entr'elles comme leurs bases, le quarré, qui est égal au triangle $ABC=\frac{1}{4}\sqrt{3}$, aura pour côté $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}}=Qq$ [173]. C. Q. F. 4°. D.

Enfin le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide tétraèdre vaut une fois et demie le quarré du côté de la pyramide (13. *liv.* 13), c'est-à-dire le diamètre $=\sqrt{\frac{3}{2}}$: il est donc égal à AN. C. Q. F. 5° . D.

PROBLÈME.

176. *Etant donnée la hauteur* ST [fig. 89 et 88] *d'une pyramide tétraèdre régulière, trouver son côté* AB.

Solution. Avec un rayon AB (*fig.* 88)

égal à ST (*fig.* 89), soit décrit le demi-cercle $BCDE$ en faisant à $AB = BC = CD = DE$; du centre B et du rayon BD, soit décrit l'arc DNa; du centre E et avec le même rayon, soit coupé cet arc au point a; du même centre et avec le même rayon Aa, soit coupé le même arc en N; AN sera le côté cherché égal au côté AB de la figure 89.

Démonstration. On a dans la figure 88 :

$$AB : AN :: 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, [175];$$

et comme on a : $1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} :: \sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1$, ainsi que cela se démontre en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens, on aura :

$$AB : AN :: \sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1;$$

c'est-à-dire, que AB est à AN dans le rapport de la hauteur de la pyramide tétraèdre à son côté (175). Donc, etc.

PROBLÈME.

177. *Diviser* [fig. 90] *la ligne* AB=1, *en cinq parties égales, lors même qu'on ne peut pas avoir une ligne quintuple de* AB, *comme au* n.° 69.

Solution. Après avoir, du centre A et du rayon AB, décrit le cercle BDp, et avoir

fait dans sa circonférence à $AB=BC=CD=DE$, et à $BD=Ba=B\alpha=Ea=E\alpha$, soit du centre α et du rayon AB, coupée la circonférence en g; de ce point g comme centre et du même rayon, soit décrit l'arc $An\alpha$; maintenant du centre a et du rayon BE, soit coupé cet arc en n; du centre B et du rayon αn, soit coupée la circonférence en P et p; des centres p et P, et du même rayon pB, soient décrits deux arcs qui se coupent en Q; AQ sera un cinquième de AB, et sera placée sur sa direction.

Démonstration. Si on prend un point u sur la direction de AE, et qu'on aie $Au=Aa$, on aura, à cause des angles droits aAu, αAu:

$(au)^2=2(Aa)^2=2(\alpha A)^2=(\alpha u)^2=4=(BE)^2$;

d'où : $au=\alpha u=BE=an$;

puis les angles égaux gAB, $gA\alpha$ valant chacun la moitié d'un angle droit (30), les angles gAa, gAu égaux entr'eux, vaudront chacun trois fois la moitié d'un angle droit. D'où les deux triangles gAa, gAu ayant un angle égal compris entre côtés égaux, le troisième côté ga sera aussi égal au troisième côté gu (4. *liv.* 1) : donc un cercle décrit du centre g et du rayon ga,

passera par le point u, et sera concentrique au cercle $A\,n\alpha$.

On a ensuite $g\,a = \sqrt{5}$ [185] ; et comme $a\,n = u\alpha$, on a [93] :

$$g\,a : g\,A :: a\,u : n\,\alpha ;$$

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : 1 :: 2 : n\,\alpha$:

donc on aura : $n\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; d'où aussi chaque côté du rhombe $P\,B\,p\,Q = n\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

donc si on compare les points P, B, p, Q, A de la fig. 90 avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3, on aura pour la fig. 90 :

$BQ \,.\, BA = (BP)^2$ [19], c'est à-dire, $BQ = \frac{4}{5}$; d'où AQ qui est dans la même droite [13] $= \frac{1}{5}$.

178. Ce problême, qui a une solution assez simple, devoit trouver place ici à cause de la division décimale qu'on exécute en divisant en deux, puis en cinq ou réciproquement. Le problême suivant est aussi de quelqu'utilité.

PROBLÊME.

179. *Former* [fig. 90] *un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion arithmétique.*

Solution. Après avoir fait la construction de la solution précédente (177), du centre E

et du rayon EQ, soit coupée la circonférence en N; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. Ce triangle sera rectangle (31. *liv.* 3); puis faisant $AB=1$, on aura :

$$EQ=EA+AQ=\tfrac{6}{5}=EN;$$

de plus on a (47. *liv.* 1) :

$(BE)^2=(EN)^2+(BN)^2$, c. à d. $4=\frac{36}{25}+(BN)^2$; on aura donc : $(BN)^2=\frac{64}{25}$; d'où $BN=\frac{8}{5}$; d'où on voit que les côtés $EN=\frac{6}{5}$, $BN=\frac{8}{5}$, $BE=\frac{10}{5}$ seront en proportion arithmétique.

PROBLÈME.

180. *Former (fig. 91) un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion géométrique.*

Solution. Du centre A avec un rayon AB, soit décrit un cercle BDd, et soit fait dans sa circonférence à $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$; soit fait ensuite à $BD=Ba=Ea$ et à $Aa=Db=db=C\beta=c\beta$; maintenant du centre E et du rayon $b\beta$, soit coupée la circonférence du cercle en N; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. La ligne AB est divisée en b en moyenne et extrême raison (46): donc si on fait $AB=1$, $Ab=x$, on aura :

$$Bb=1-x, \quad \text{et } x^2=1-x;$$

et résolvant cette dernière équation,

$$x = Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

d'où résulte :

$$b\beta = 2Ab = \sqrt{5} - 1 = EN;$$

on a ensuite (31. *liv.* 3) (47. *liv.* 1) :

$$(BE)^2 = (EN)^2 + (BN)^2;$$

c'est-à-dire,

$$4 = 6 - 2\sqrt{5} + (BN)^2;$$

d'où on tire :

$$(BN)^2 = 2(\sqrt{5} - 1) = BE.NE:$$

donc on a (17. *liv.* 6) :

$$BE : BN :: BN : NE:$$

donc, etc.

181. *Lemme.* Si on fait les côtés des cinq polyèdres réguliers $= 1$, on aura le rayon d'une sphère

circonscrite
- au tétraèdre $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$,
- au cube $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
- à l'octaèdre $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$,
- au dodécaèdre $= \frac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1)$
- à l'icosaèdre $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Démonstration. Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide comprise entre quatre triangles équilatéraux vaut (13. *liv.* 13), une fois et demi le quarré du côté de la pyramide, c'est-à-dire, en faisant le côté

$= 1$, le diamètre est égal à $\sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite au cube, vaut (15. *liv.* 13) trois fois le quarré du côté de la pyramide, c'est-à-dire, le diamètre $= \sqrt{3}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à l'octaèdre (corps régulier terminé par huit faces qui sont toutes des triangles équilatéraux), est (14. *liv.* 13), double du quarré du côté d'un de ces triangles, c'est-à-dire, le diamètre $= \sqrt{2}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

La sphère circonscrite au dodécaèdre (corps régulier, terminé par douze faces qui sont toutes des pentagones réguliers), est aussi circonscrite (17. *liv.* 13) à un cube qui a pour côté une diagonale de ces pentagones. Mais si on fait [*fig.* 64] le côté $AB = 1$, la diagonale BN du pentagone $ABLMN$ $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$; en effet, on a (137) : $BN = bE$ $= Ab + AE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + 1$ [180] $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$: donc BN ou la diagonale d'un pentagone qui a le côté $= 1$, est égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Si sur cette ligne on forme un cube, on aura le quarré du diamètre de la sphère qui lui sera circonscrite $= 3\,(BN)^2$, et le diamètre $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) . \sqrt{3}$: donc le rayon de la sphère qui comprend le dodécaèdre $= \frac{1}{4}\sqrt{3} . (\sqrt{5} + 1)$.

Si AB est le diamètre de la sphère qui comprend l'icosaèdre, [*fig.* 92], et qu'après avoir pris sur ce diamètre $AC = 4CB$, et élevé la perpendiculaire CD qui rencontre en D la demi-circonférence ADB, on décrive avec le rayon DB un cercle, et dans ce cercle un pentagone régulier, le côté de ce pentagone sera [16. *liv.* 13] le côté de l'icosaèdre (corps régulier terminé par vingt faces qui toutes sont des triangles équilatéraux); or le côté du pentagone est au rayon du cercle circonscrit comme Bb est à BA [*fig.* 12] (40); mais faisant $AB = 1$, on a :

$$Ab = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$(Ab)^2 = \tfrac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$$

$$(Bb)^2 = (AB)^2 + (Ab)^2 \text{ [47. liv. 1]} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2};$$

d'où on aura : $Bb : AB :: \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1$;

mais on a : $\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1 :: 1 : \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$.

Donc supposant le côté de l'icosaèdre $= 1$, on aura :

$$BD \text{ [fig. 92]} = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

On a ensuite :

$$(AB)^2 = 5(BD)^2 \text{ [16. liv. 13]} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}:$$

donc $AB = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$, et le rayon $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

PROBLÊME.

182. *Etant donné le côté* AB *des cinq corps réguliers* (fig. 93), *trouver le rayon des différentes sphères qu'ils comprennent.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB, soit décrit le cercle BDd, et soit fait dans sa circonférence à $AB=BC=CD=DE=Ed$; soit fait ensuite à $BD=Ba=B\alpha=E\alpha=Ea$; du centre α et avec le rayon αa, soit décrit l'arc aP; du même centre α et avec le rayon αB, soit décrit l'arc $Bpqs$; du même centre α et avec le rayon AB, soit décrit l'arc grt; du même centre α et avec le rayon BE, soit décrit l'arc $MQRST$; des centres D et d, avec le rayon Aa, soient décrits deux arcs qui se coupent en b; du centre E et avec le rayon Ab, soit coupée la circonférence en L; soit fait à $AB=aP=MQ$; à $Aa=MR$; à $Eb=MS$; et à $BL=MT$; soit fait ensuite à $aB=Pp$; à $MB=Qq=Ss$; et à $Mg=Rr=Tt$;

Bp	sera le rayon de la sphère qui comprend	le tétraèdre,
Bq		le cube,
gr		l'octaèdre,
Bs		le dodécaèdre,
gt		l'isocaèdre.

Démonstration. En faisant $AB=1$, on a :

$$\alpha a = 2\sqrt{2}\ [100],\ \alpha B = \sqrt{3}.$$

on a ensuite : $\alpha a : \alpha B :: aP : Bp$ [93];
c'est-à-dire, $2\sqrt{2} : \sqrt{3} :: 1 : Bp$;
on aura donc : $Bp = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où, etc. [181].
On a aussi [93] : $\alpha M : \alpha B :: MQ : Bq$;
c'est-à-dire, $2 : \sqrt{3} :: 1 : Bq$; d'où $Bq = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
On a de même : $\alpha M : \alpha g :: MR : gr$;
c'est-à-dire,

$$2 : 1 :: \sqrt{2} : gr;\ \text{d'où}\ gr = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

on a également $\alpha M : \alpha B :: MS : Bs$.
Mais $MS = bE = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ [181] :
donc $2 : \sqrt{3} :: \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) : Bs$;
d'où $Bs = \frac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1)$.
On a enfin $\alpha M : \alpha g :: MT : gt$; mais $MT = BL$.
De plus, $(BL)^2 = (BE)^2 - (EL)^2$ [31. *liv*. 3. 47. *liv*. 1];
c'est-à-dire, $(BL)^2 = (BE)^2 - (Ab)^2$
$= 4 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ [181.] $= \frac{5+\sqrt{5}}{2}$;
d'où $BL = MT = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$;
et par conséquent $2 : 1 :: \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : gt$:
d'où $gt = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Donc les distances Bp, Bq, gr, Bs, gt seront respectivement les rayons des sphères qui comprennent les cinq corps réguliers, savoir : la pyramide, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

PROBLÈME.

183. *Etant donné* (fig. 94) *le rayon* AB *de la sphère qui comprend les cinq corps réguliers, trouver leurs cotés.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB, soit décrit le plus grand cercle de la sphère BDd, et soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis à $BD = Ba = Ea$, et à $Aa = Db = db$; soit fait ensuite dans la circonférence à $AB = aH$, et à $Aa = EF = Hh$; du centre a et avec le rayon aE, soit décrit l'arc $ESQP$; du même centre a et avec le rayon ah, soit décrit l'arc hT; soit fait à $Aa = EP$; à $AB = EQ$; à $Ab = ES$; à $bF = hT$. Puis, soit fait à $EL = Pp = Qq = Ss$, et à $hL = Tt$:

Lp sera le côté du tétraèdre,
Lq . . . . du cube,
Aa . . . . de l'octaèdre,
Ls . . . . du dodécaèdre,
Lt . . . . de l'icosaèdre.

Démonstration. On a l'arc Eh égal à un huitième de la circonférence (30); d'où $ah = \sqrt{5}$ [185]; et comme l'angle droit bAF est le même que BAF, parce que le point b

est sur la ligne AE [13. 27], bF sera le côté du pentagone (40), et Ab le côté du décagone inscrit au cercle BDd [41]; faisant donc $AB=1$, on aura : $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ [180]; et $(bB)^2=(AF)^2+(Ab)^2$ $=1+\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; d'où bF $=hT=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$.

On aura ensuite : $aE : aL :: EP : Lp$ [93], c'est-à-dire, $\sqrt{3} : 2 :: \sqrt{2} : Lp$: donc on aura : $Lp=2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Or le rayon de la sphère est au côté du tétraèdre qu'elle contient comme $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : 1$ [181] $:: 1 : 2\sqrt{\frac{2}{3}}$: donc faisant le rayon AB de la sphère $=1$, Lp sera le côté du tétraèdre qui y est contenu.

On aura aussi (93) : $aE : aL :: EQ : Lq$, c'est-à-dire,

$$\sqrt{3} : 2 :: 1 : Lq;\ \text{d'où}\ Lq=2\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Or le rapport du rayon de la sphère au côté du cube qui y est contenu, est :

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} : 1\ [181] :: 1 : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}};\ \text{donc, etc.}$$

On aura de même $Aa=\sqrt{2}$ pour côté de l'octaèdre ; car le rapport du rayon de la sphère au côté de l'octaèdre qui y est contenu est : $\frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ [181] $:: 1 : \sqrt{2}$, donc, etc.

On aura également : $aE : aL :: ES : Ls$, c'est-à-dire, $\sqrt{3} : 2 :: \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) : Ls$;

d'où $L s = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$. Or le rapport du rayon de la sphère au côté du dodécaèdre qui y est contenu, est :

$\frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}+1) : 1$ [181] $:: 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$;

donc, etc. Enfin on aura :

$$a h : a L :: h T : L t \text{ [93]},$$

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : 2 :: \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : L t$:

d'où : $L t = 2 \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$. Or le rapport du rayon de la sphère au côté de l'icosaèdre qui y est contenu, est :

$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : 1$ [181] $:: 1 : 2 \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$.

Donc, etc.

PROBLÈME.

184. *Etant donné un point* B *sur la circonférence d'un cercle donné* [fig. 95], *trouver deux autres points* L *et* M, *tels que le triangle* BLM *soit équilatéral et touche le cercle par le côté* LM *au point* E *qui en est le milieu.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à son rayon $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis, soit fait à $BD = Ba = Ea$:

du centre a, et avec le rayon aA, soit décrit un arc qui passe par α; du centre E et avec le rayon EA, soit décrit un arc qui coupe le précédent en α; du centre α, avec le même rayon αE, soit coupée la circonférence en P. Puis, du centre E et du rayon EP, soit décrit un arc qui passe par L et M; des centres D et d avec le rayon aP, soient décrits deux arcs qui coupent le précédent en L et M; les points L et M seront les deux points cherchés.

Démonstration. Si on compare les points a, A, E, α, P de la fig. 95, avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$$

qui appartient à la fig. 3, on tirera pour la fig. 95 celle-ci :

$$(Aa)^2 = (AE)^2 + (Ea)^2 - EP \cdot Ea;$$

et substituant les valeurs numériques [27] :

$$2 = 1 + 3 - EP \cdot \sqrt{3},$$

d'où : $2 = EP \cdot \sqrt{3}$ et $EP = \frac{2}{3}\sqrt{3}$;

et comme les trois points E, P, a sont dans la même droite [13], on aura :

$$Pa = Ea - EP = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Si on suppose menée la ligne BE qui coupe en R la ligne Dd, on aura [104] :

$$BR = \tfrac{3}{2};\ RD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};\ BE = 2;$$

d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR, RD, BE sera égale à $\frac{2}{3}\sqrt{3} = EM$:

on aura aussi [104] : $RE=\frac{1}{2}$, $BD=\sqrt{3}$ [2]; d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR, BD, RE sera égale à $\frac{1}{3}\sqrt{3}=DM$: donc les lignes EM, DM seront de la longueur nécessaire pour que le triangle BEM soit semblable au triangle BRD (2. *liv.* 6): donc ils seront semblables ; car le point M ne peut être placé dans un autre endroit (8. *liv.* 1). On prouvera de la même manière que le triangle BRd est semblable au triangle BEL; d'où on voit que le triangle BDd est semblable au triangle BML (20. *liv.* 6): donc aussi ce dernier est équilatéral. De plus, les angles BEM, BEL égaux aux angles BRD, BRd sont droits, et les lignes EN, EL sont égales: donc BLM est le triangle cherché.

PROBLÊME.

185. *Dans un cercle dont le rayon* AB *soit donné* [fig. 96], *inscrire cinq quarrés égaux, dont l'un soit concentrique au cercle et les autres le touchent, chacun ayant un côté commun avec le quarré du milieu.*

Solution. Soient faites égales au rayon AB les cordes BC, CD, DE. Soit fait à BD =

$Ba=Ea$; faites encore égales à Aa les cordes BF, Bf: du centre a, avec le rayon AB, coupez le cercle en G et faites la corde $Gg=Aa$; du centre g avec le rayon ga, décrivez un arc aP et faites sa corde $aP=aA$; du même centre g et avec le rayon gA, décrivez un arc Ap sur la direction de l'arc aP; faites à $aA=Pp$; faites maintenant égales à Ap les cordes Bq, fn, Em, Fl; avec le même rayon Ap et des centres B, q, f, n, E, m, F, l, décrivez des arcs qui se coupent dans le cercle en L, Q, N, M; $LMNQ$ sera le quarré central, et $BLQq$, $fQNn$, $ENMm$, $FMLl$ seront les autres quarrés cherchés.

Démonstration. Si on compare les points a, A, G, B, g de cette figure avec les points Q, p, A, R, S de la fig. 4, on aura (21) pour la fig. 87 l'équation :

$$(ag)^2=(aB)^2+Gg.Aa,$$

c'est-à-dire, en faisant le rayon $AB=1$,

$$(ag)^2=3+2=5\ [27]; \quad \text{d'où } ag=\sqrt{5}.$$

De plus, on a $aP=aA=\sqrt{2}$.

Or : $ga : aP :: gA : Ap$ [93],

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : \sqrt{2} :: 1 : Ap$;

d'où $Ap=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=EM$;

et comme $BCDE$ est une demi-circonférence [64], BmE sera un angle droit (31 *liv.* 3);

d'où :

d'où :

$(BE)^2=(Bm)^2+(mE)^2$; c. à. d. $4=(Bm)^2+\frac{2}{5}$;
d'où $(Bm)^2=9\cdot\frac{2}{5}$, et $Bm=3\sqrt{\frac{2}{5}}=3mE$.
On trouvera la même valeur pour qE, et on démontrera que tous les autres angles du quadrilatère $BmEq$ qui sont inscrits et appuyés sur un diamètre sont droits : donc ce quadrilatère est un parallélogramme rectangle. On démontre de même que $Flfn$ est un parallélogramme rectangle.

Si on fait la corde $Em=k$, mF sera la corde du complément de l'angle droit $=h$ [159], et on aura $h^2=2-2k\sqrt{(1-\frac{1}{4}k^2)}$;
d'où, à cause de $k^2=\frac{2}{5}$, on aura :
$h^2=2=2k\sqrt{\frac{9}{10}}=2-2\sqrt{\frac{9}{25}}=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}=2k^2$,
c'est-à-dire, $(Fm)^2=(FM)^2+(Mm)^2$;
d'où l'angle FMm sera droit (48. *liv.* 1), ainsi que les autres angles BLl, fQq, ENn.
Puis, si on appelle x la distance du point m à celui où tombe du point F la perpendiculaire sur Bm, on aura (13. *liv.* 2) :

$$(BF)^2=(Fm)^2+(Bm)^2-2Bm\cdot x,$$

c'est-à-dire, $2=\frac{4}{5}+\frac{18}{5}-6x\sqrt{\frac{2}{5}}$;
d'où $x\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$, et divisant par $\sqrt{\frac{2}{5}}$,

$$x=\sqrt{\frac{2}{5}}=mM.$$

Ensuite, si on nomme y la perpendiculaire qui tombe du point F sur Bm, on aura :

$$y^2=(Fm)^2-x^2=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5};$$

d'où on tire : $y = \sqrt{\frac{2}{5}} = FM$.

On démontre par-là que les points M et L sont sur la ligne $B\,m$; et comme on a :

$$Bm = 3.Em = Mm + BL + Em;$$

on aura donc aussi : $LM = E\,m$.

De plus, on démontre que les autres côtés MN, NQ, LQ ont la même valeur. De tout ce qui précède, il résulte que les angles extérieurs au quadrilatère $LMNQ$ qui ont leurs sommets aux points L, M, N, Q sont droits : donc les angles intérieurs le seront aussi : donc on aura les cinq quarrés demandés.

PROBLÊME.

186. *Etant donnés les cinq points* A, B, C, D, E, *sommets des angles d'un pentagone régulier* [fig. 97], *trouver les cinq points* a, b, c, d, e *où se coupent les diagonales de ce pentagone.*

Solution. Des centres A, B, C, D, E avec le côté AB du pentagone pris pour rayon, soient décrits des arcs qui se coupent en a, b, c, d, e; ces points seront ceux d'intersection des diagonales.

Démonstration. Si on suppose les diagonales menées et les côtés du pentagone $ABCDE$ tracés, on aura l'angle $BAC = BDA$ (29. *liv.* 3)

$= CAD$: d'où $Ab = bD$ (6. *liv.* 1). On aura ensuite $BbA = bDA + bAD$ (32. *liv.* 1) $= BAb + bAD = BAD = ABD$ (5. *liv.* 1); d'où le triangle ABb sera isoscèle (6. *liv.* 1), c'est-à-dire, on aura $AB = Ab = bD$; donc, etc.

PROBLÈME.

187. *Dans un cercle d'un rayon* AB *donné* [fig. 98], *inscrire six pentagones réguliers.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à $AB = BC = CD = DE = Ed$; à $BD = Ba = Ea$; et à $Aa = BF = Db = db$; soit aussi fait dans la même circonférence à $bF = BP = PQ = QR = RS$; avec le même rayon bF et des centres B, P, Q, R, S, soient décrits des arcs qui se coupent en β, p, q, r, s. Maintenant des centres β, P avec le rayon βp, soient décrits deux arcs qui se coupent en c; avec le même rayon et des centres P, p, soient décrits deux arcs qui se coupent en d; on aura deux des pentagones cherchés, savoir : $\beta pqrs$ qui a son centre en A, et $\beta pdPc$ qui touche le cercle donné en P. On trouvera de la même manière les sommets des angles des quatre autres pentagones $pqfQe$, $qrhRg$, $rskSi$, $s\beta mBl$.

Démonstration. Les points B, P, Q, R, S seront les sommets des angles d'un pentagone régulier inscrit au cercle donné (40. 128); d'où les points β, p seront dans la diagonale BQ, et les points p, q dans la diagonale PR [186]; et comme $Bp = \beta Q$, on aura $B\beta = pQ$. On prouvera de même que $Pp = qR$, et à cause de $BQ = PR$ [27. *liv.* 3], on aura aussi $B\beta = Pp$, et $\beta p = pq$. On prouvera aussi de la même manière que tous les côtés du pentagone $\beta pqrs$ sont égaux entr'eux. De plus, on a l'angle βpq, c'est-à-dire, $BpR = BPR + PBp$ [32. *liv.* 1]; mais PBp, c'est-à-dire, $PBQ = QPR$: donc $\beta pq = BPQ$. On démontre de même que les autres angles du pentagone $\beta pqrs$ sont égaux aux angles du pentagone $BPQRS$: donc ils sont tous deux réguliers. En outre, l'angle QBR formé par deux diagonales du pentagone $BPQRS$, qui est l'angle βBs sera égal à l'angle βqs formé par deux diagonales du pentagone $\beta pqrs$ (20. *liv.* 6). Or comme les triangles βBs, βqs sont isoscèles, ils auront aussi les angles à la base commune βs égaux entr'eux (5. 32. *liv.* 1); d'où aussi les triangles seront en tout égaux (26. *liv.* 1); d'où les triangles $Bm\beta$, βpq ayant tous les côtés égaux entr'eux, auront aussi les angles égaux (8. *liv.* 1), ainsi que les

triangles Bls, srq : donc tous les côtés et tous les angles du pentagone $Bm\beta sl$ seront égaux aux côtés et aux angles du pentagone $\beta pqrs$; ils seront donc tous deux réguliers. On démontre la même chose pour les autres pentagones $\beta cPdp$, $peQfq$, $qgRhr$, $riSks$: donc, etc.

188. Le point b sera le centre du pentagone $\beta mBls$, et la distance bB le rayon du cercle circonscrit à ce pentagone et aux autres qui lui sont égaux, ainsi que nous le démontrerons bientôt : ce qui ajoute encore une belle propriété au point b que nous avons déjà remarqué tant de fois dans cette géométrie. Car, outre les divisions en moyenne et extrême raison qu'il nous a fait obtenir dans le diamètre BAE (45, 46), outre qu'il a servi à détermiminer le côté bF du pentagone inscrit au cercle du rayon AB [40], le côté bA du décagone inscrit au même cercle (41) ; on a encore le rayon Bb du cercle circonscrit aux six pentagones qu'on peut inscrire au plus grand cercle du rayon AB, comme dans le présent problême ; car si on suppose le rayon $AB=1$, on a : $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ [180] ; et comme (31. *liv.* 3)

$$(BE)^2=(BQ)^2+(QE)^2=(BQ)^2+(Ab)^2;$$

on aura : $BQ=\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

On a ensuite : $\beta Q=BP=bF=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$ [181] :

d'où : $BQ:\beta Q::BQ.\beta Q:(\beta Q)^2::\sqrt{5}:\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$::1:\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)::BA:bA$:

d'où : $BQ:BQ-\beta Q::BA:BA-bA$,

c'est-à-dire, $BQ:B\beta::BA:Bb$.

Donc les deux diagonales des pentagones *BPQRS*, *Bmβsl* seront entr'elles comme *BA : bA* : donc *BA* étant le rayon du premier pentagone, *Bb* sera le rayon du second (20. *liv*. 6).

PROBLÈME.

189. *Etant donnés les sommets des angles d'un exagone régulier* BCDEdc [fig. 99], *trouver les points* l, m, n, g, p, q *où se coupent celles de ses diagonales qui ne passent pas par le centre.*

Solution. Soit fait à $BD=Ba=Ea$; puis à $BC=BA=CA=B\alpha$; à $aA=a\alpha$; à $\alpha B=\alpha P=AP$. Maintenant des centres *B*, *C* avec le rayon *aP*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *l*; des centres *C*, *D*, soient décrits deux autres arcs qui se coupent en *m*,

et ainsi de suite ; ces points l, m, etc. seront les points cherchés.

Démonstration. Supposons que les diagonales indiquées se coupent en l, m, n, g, p, q, comme on a l'angle $BDc = DcE$ (29. *liv.* 3), BD sera parallèle à cE (28. *liv.* 1) : donc le triangle Clm sera semblable au triangle CcE (2, 5. *liv.* 6), et par conséquent équilatéral. De même on aura le triangle Blq semblable au triangle BDd, puis les triangles CcE et BdD ayant les côtés égaux, seront égaux (2) (8. 4. *liv.* 1) ; et le côté BD, et par conséquent lm étant à égale distance du côté cE que le côté Cc, ainsi que ql du côté dD (14. *liv.* 3), si on applique le triangle BdD sur le triangle CcE, la droite ql tombera sur la droite lm, et elles seront égales ; mais $Bl = lq$: donc $Bl = lm$. De même on démontre que $Dm = ml$. Donc, en faisant le rayon du cercle $BC = AB = 1$ [2], on a :

$$Bl = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} \sqrt{3};$$

de même $Cl = \frac{1}{3} \sqrt{3}$. mais on a fait précisément

$$Bl = Cl = aP = \frac{1}{3} \sqrt{3} \text{ [184]} :$$

donc l est un des points cherchés. On démontre la même chose pour les autres points m, n, g, p, q ; donc, etc.

PROBLÈME.

190. *Dans le cercle du rayon donné* AB [fig. 100], *inscrire sept exagones réguliers, dont un soit concentrique au cercle, et les autres soient disposés autour du premier.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis à $DB = DV = dV$. Des centres C et A, avec le rayon CV, soient décrits deux arcs qui se coupent en P; du centre P, avec le même rayon PC, soit coupée la circonférence du cercle en δ; $d\delta$ sera le côté des exagones à inscrire, et que l'on inscrira facilement l'un près de l'autre. Ensuite, des centres d et δ, avec le même côté $d\delta$ pris pour rayon, soient décrits deux arcs qui se coupent en α; du centre α et avec le même rayon, soit décrit un cercle dans lequel on inscrive (15. *liv.* 4) un exagone régulier $d\delta mnpq$. Du centre A avec le même rayon, soit décrit un cercle qui passera par np; soit décrit dans ce cercle l'exagone qui a pour un des côtés la ligne pn; sur les côtés de cet exagone, soient décrits les autres exagones, comme on a fait d'abord sur le côté $d\delta$, et on aura les sept exagones demandés.

Démonstration. En faisant pour abréger $AB=1$, on aura $CP=CV=\sqrt{7}$ [100] $=AP$: puis on aura $AP : A\delta :: A\delta : \delta d$ [86], c'est-à-dire, $\sqrt{7} : 1 :: 1 : \delta d$; d'où $\delta d=\sqrt{\frac{1}{7}}$. Supposons pour un moment inscrits les exagones cherchés, et soit leur côté $d\delta$ qui est la quantité inconnue $=x$; on divisera cette ligne en deux parties égales au point v, et on menera la droite Av, qui lui sera perpendiculaire [83], et passera par α centre de l'exagone, dont $d\delta$ est le côté, en coupant aussi par moitié au point μ le côté pn de l'exagone central; et comme on a dans le triangle équilatéral Apn:

$$pn : A\mu :: 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ [104]};$$

on aura $x : A\mu :: 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$; d'où $A\mu=\frac{1}{2}x\sqrt{3}$, et $Av=3A\mu=\frac{3}{2}x\sqrt{3}$, et encore $dv=\frac{1}{2}x$; puis, comme $1=(Ad)^2=(Av)^2+(dv)^2$, on aura :

$$1=\tfrac{27}{4}x^2+\tfrac{1}{4}x^2=7x^2;\ \text{d'où}\ x^2=\tfrac{1}{7}\ \text{et}\ x=\sqrt{\tfrac{1}{7}}$$

valeur qui est précisément celle déterminée pour la ligne $d\delta$ dans la solution du problême, ainsi qu'on vient de le démontrer; donc, etc.

On trouve dans Pappus, *liv.* 8, *probl.* 15, *prop.* 19, ce problême résolu avec la règle et le compas, d'une manière qui n'est pas plus simple que la précédente. Il y a aussi ajouté une construction mécanique.

191. Nous croyons avoir jusqu'ici rempli les promesses que nous avons faites (6 et 7). Quant au premier point, nous avons déjà donné tous les élémens de la *Géométrie du compas*, c'est-à-dire, la totalité des problêmes qui suffisent pour trouver avec le compas seul et sans la règle tous les points qu'on peut trouver avec ces deux instrumens réunis. Pour démontrer ceci [71], on observe d'abord que la géométrie élémentaire fournit le moyen de trouver les points d'un problême, ou par la section des arcs entr'eux (et ce moyen est tout-à-fait propre à la Géométrie du compas), ou par la section des arcs et des lignes droites, ou par celle des lignes droites entr'elles (et tout cela se trouve compris dans le livre 7), [110 et suivans]. Ensuite une droite quelconque nécessaire à la solution d'un problême se trouve déterminée de grandeur et de position. Par rapport à la grandeur, nous avons enseigné dans le liv. 3, [64 et suivans], et dans le liv. 4, [72, 73, 74], à aggrandir, diminuer, diviser une grandeur quelconque finie en un nombre quelconque de parties ; puis, dans le livre 5, [86 et suiv.], à trouver les troisièmes, les quatrièmes, les moyennes proportionnelles, ainsi qu'à diviser une droite dans un rapport quelconque donné. Quant à la position des droites,

elle se détermine par la position de deux points pour chacune d'elles ; or le livre 4 [76 et suivans] enseigne à trouver les points pour tous les cas des perpendiculaires et des parallèles. Le livre 8 [113 et suiv.] donne tout ce qui est nécessaire pour déterminer la position des lignes droites entr'elles sous un angle quelconque, donné par le moyen de deux points. On a épuisé dans le liv. 2 [27 et suiv.] les divisions de la circonférence du cercle et de tous les arcs qui sont du ressort de la Géométrie élémentaire. Je ne vois plus d'après tout cela quels autres élémens on pourroit desirer. A l'égard du choix des problêmes que nous avons recueillis ici, nous laisserons aux Mathématiciens le soin de juger si dans un grand nombre de cas utiles ou récréatifs, il n'est pas préférable, non-seulement pour la précision du résultat, mais encore pour la promptitude de la construction, d'abandonner la règle et de se servir du compas seulement, jusqu'à ce qu'ayant trouvé les points nécessaires au problême, on mène, s'il le faut, d'un point à l'autre une ou plusieurs droites que l'on ne peut pas à la vérité tracer avec le compas seul, et qui exigent l'usage de la règle.

GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE DOUZIÈME.

PROBLÊMES RÉSOLUS PAR APPROXIMATION.

192. Tous les problêmes supérieurs au second degré ne peuvent être résolus géométriquement seulement avec la règle et le compas; mais ils exigent des intersections de courbes coniques ou de degré supérieur; et par conséquent on ne peut les résoudre exactement avec la seule Géométrie du compas. Les instrumens faits pour décrire la cicloïde, la conchoïde, la cissoïde, la trajectoire et d'autres courbes semblables qui servent à la résolution de ces problêmes, sont assurément d'une invention très-ingénieuse et d'un prompt et élégant usage dans la pratique. Pourtant, lorsqu'on n'a pas besoin d'avoir toute la trace de la courbe à laquelle ils sont destinés, et qu'il suffit d'obtenir un point par l'intersection de cette courbe avec d'autres lignes, comme ils laissent toujours quelques soupçons

de petites erreurs qu'on ne peut pas quelquefois bien calculer, il vaudra mieux, dans beaucoup de cas, préférer à l'exactitude théorique de ces méthodes l'approximation pratique suffisante d'une construction faite avec la règle et le compas. Alors je dis que le plus souvent une solution obtenue avec le seul compas sera encore préférable. On pourra s'en convaincre par des exemples, en comparant nos solutions avec celles déjà connues.

193. Comme il n'y a encore aucune méthode générale pour obtenir par la Géométrie élémentaire ces approximations, on ne doit pas attendre que j'en propose aucune par ma Géométrie du compas. Je n'appelle point méthode géométrique d'approximation celle par laquelle on obtient une valeur approchée à l'aide d'une de ces échelles qu'on nomme géométriques, puisqu'avant de s'en servir il faut faire un calcul arithmétique : une telle méthode doit être plutôt appelée arithmétique. Supposons par exemple, qu'on veuille la racine cubique du nombre 2, l'extraction qu'on veut faire arithmétiquement de cette racine, pour pouvoir ensuite prendre les portions décimales ou une fraction quelconque sur une échelle géométrique avec le com-

pas, afin de doubler un cube, se fait par un moyen qui est plutôt du ressort de l'Arithmétique que de celui de la Géométrie.

194. Je n'ai pu encore jusqu'ici appercevoir d'autre moyen d'obtenir d'une manière très-approchée la solution de plusieurs problêmes utiles supérieurs au second dégré, que celui de trouver des genres, et pour ainsi dire des classes différentes de construction de figures élémentaires ; puis de soumettre au calcul le plus grand nombre possible de cas particuliers presqu'innombrables qui en résultent, et de choisir parmi ceux qui tendent le mieux au but qu'on se propose, et les employer à résoudre le problême.

195. J'ai déjà examiné plusieurs de ces genres, et pour ainsi dire de ces classes de constructions, et j'ai entre les mains des recherches sur cette matière. La classe la plus simple est celle dont nous ferons presqu'uniquement usage dans ce dernier livre de notre Géométrie. Elle est fondée sur les trois points remarquables *a*, *b* et *e* [*fig.* 9, 11 et 12] (59), qui nous ont déjà tant servi dans les livres précédens, et sur lesquels nous avons à donner les douze équations que nous avons promises [59].

196. Soit le point *Z* un point quelconque

pris sur le quart de la circonférence BF dans la fig. 12 construite comme dans le livre second, et soit pris dans l'autre quart Bf le point z, de manière qu'on ait $Bz = BZ$, on aura [20 et 21] :

$$[A] \ldots (aZ)^2 = (aB)^2 - Zz . Aa$$
$$[B] \ldots (bZ)^2 = (bB)^2 + Zz . Ab$$
$$[E] \ldots (eZ)^2 = (eB)^2 - Zz . Ae$$

197. Si on veut avoir les équations pour les distances des trois points a, b et e du point z, on n'aura qu'à changer les signes du second membre des équations précédentes, et on aura [20 et 21] :

$$[A'] \ldots (az)^2 = (aB)^2 + zZ . Aa$$
$$[B'] \ldots (bz)^2 = (bB)^2 - zZ . Ab$$
$$[E'] \ldots (ez)^2 = (eB)^2 + zZ . Ae.$$

198. La droite Zz étant la corde de l'arc double de $BZ = 2\, sin. BZ$, et supposant $AB = 1$, ce que nous sous-entendrons toujours, on aura : $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ [2] ; $(Aa)^2 = 2$ [27] ; $(Bb)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ [181] ; $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2}$ [38] ; d'où $(eB)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2 = 3 - \sqrt{2}$; et $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ [180] : si on fait $aZ = a$, on aura : $[A'] \ldots a^2 = 3 - 2\, sin. A . \sqrt{2}$. Cette équation comprend aussi le cas où l'arc A est négatif comme Bz, dans lequel le signe $-$ placé devant $2\, sin. A \sqrt{2}$ se change en $+$.

199. La valeur de a peut toujours être celle d'une corde quelconque du cercle BDd, excepté dans le cas où la valeur de la distance az exprimée par a est plus grande que 2. Pour calculer alors plus facilement la valeur de a, comme on a :

$$\sqrt{2} = BF = 2\ sin.\ 45^o,$$

et $2\,sin.\ A\ .\ sin.\ 45^o = cos.(A-45^o) - cos.A + (45^o)$
$= cos.\ (45^o - A) - sin.\ (45^o - A)$ [158];
on aura :

[*] $a^2 = 3 - 2\,cos.(45^o - A) + 2\,sin.\ (45^o - A)$.

200. Dans les autres cas où a est plus petit que 2, en appelant A' l'arc dont a est la corde, on aura :

$$\frac{a^2}{4} = sin.^2 . \tfrac{1}{2} A' = \frac{1 - cos.\ A'}{2}\ [155]$$
$$= \tfrac{3}{4} - sin.\ A\ \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{3}{4} - sin.\ A\ .\ cos.\ 45^o;$$

d'où réduisant $cos.A' = 2\,sin.\ A\ .\ cos.\ 45^o - \tfrac{1}{2}$;
d'où encore [159],
$cos.\ A' = sin.(A + 45^o) + sin.\ (A - 45^o) - sin.30^o$,
ou bien,

[1] $cos.\ A' = cos.\ (45^o - A) - sin.\ (45^o - A) - sin.\ 30^o$.

201. Si on veut se servir de cette équation pour obtenir une des divisions de la circonférence que l'on ne peut pas avoir exactement, on y introduira au lieu de A un arc précis, par exemple, la vingtième partie de la circonférence

férence $=18^\circ$, en faisant $BZ = 18^\circ$ [*fig.* 12],
et on aura :

$$\cos. A' = \cos. 27^\circ - \sin. 27^\circ - \sin. 30^\circ.$$

Or $\sin. 27^\circ = 0,4539905$
$\sin. 30^\circ = 0,5000000$

$0,9539905$
$\cos. 27^\circ = 0,8910065$

d'où $\cos. A' = -0,0629840$.

On trouve ensuite dans les tables :

$$0,0629840 = \sin. 3^\circ\, 36' \tfrac{1935}{2903}.$$

Or comme la valeur de $\frac{1935}{2903}$ approche tellement de $\frac{2}{3}$, qu'il n'y a pas seulement erreur d'une unité entière dans le dernier chiffre du nombre 1935, on pourra prendre 0,0629840 pour le sinus de $3^\circ\, 36'\, 40''$, sans qu'on puisse reconnoître avec les tables ordinaires, s'il y a erreur d'une tierce. Donc l'arc A', qui a son cosinus négatif, sera $=93^\circ\, 36' 40''$, et BZ étant supposé $= 18^\circ$, la distance aZ sera la corde de cet arc. Donc en appliquant pour corde sur la circonférence la distance aZ prise avec le compas, on déterminera un arc $= 93^\circ\, 36' 40''$. avec une approximation suffisante.

202. Pour rechercher l'erreur qui se trouve dans les nombres des tables ordinaires, on observe que le sinus de 18° étant égal à la

moitié de la corde de la dixième partie de la circonférence, c. à. d. $=\frac{1}{2}Ab=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, et le cosinus de 45° étant égal à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, l'équation $cos. A'=2 sin. A . cos. 45°-\frac{1}{2}$ [200] donne $cos. A'=\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)-\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{4}(\sqrt{10}-\sqrt{2})-\frac{1}{2}=0{,}0629839824$.
Puis, calculant aussi avec plus de chiffres le sinus de 3° 36′ 40″, on trouve 0,062984061154, et en se tenant à huit décimales,
on trouve $sin.$ 3° 36′ 39″ = 0,06297921

la différence pour 1″ ou 60‴ est de 485; donc si 485 donne 60‴, 8 donnera $\frac{96'''}{97}$, et par conséquent ne donnera pas une tierce entière. Donc l'arc qui a pour corde la distance aZ n'excède pas d'une tierce entière 93° 36′ 40″.

203. D'après cela, voici l'usage qu'on pourroit faire de cette valeur pour l'ancienne division du cercle. Il est clair qu'elle pourroit servir à diviser une minute en trois parties, dans des cercles où on auroit marqué les minutes; car on trouveroit les 40″, c'est-à-dire, $\frac{2'}{3}$ entre une minute et la suivante, et cela sans erreur d'une tierce. On peut encore l'employer pour trouver la troisième partie d'un degré. En effet, comme l'arc $cBN=90°$, et $Np=3°$ [31. 43], si on prend $BZ=Kp$,

alors on aura l'arc $BZ = 18^o$ [32]; du point c pris pour centre avec le rayon aZ, soit décrit un arc, il coupera la circonférence entre p et P en un point distant de p de 36′ 40″ à très-peu de chose près. Nommons y ce point, et triplons par exemple l'arc $Ny = 3^o\ 36' \cdot 40''$, nous aurons un arc = 10° 50′, sans qu'il y ait une erreur de trois tierces, et si c'est de N vers G qu'on triple cet arc, la dernière division tombera entre π et ϕ; nommons n le point où elle tombe, de manière qu'on ait $Nn = 10^o\ 50'$; nommons ensuite μ le point qui est à la moitié de l'arc $\pi\phi$ obtenu par le n.° 58, on aura l'arc $\mu n = 20'$ sans qu'il y ait erreur de trois tierces, c'est-à-dire, qu'on aura obtenu un tiers de degré de l'ancienne division avec une telle précision, que je ne crois pas qu'on en puisse desirer une plus grande dans la pratique.

204. Nous avons pris cet exemple parmi toutes les valeurs de *cos.* A' calculées en introduisant successivement, dans l'équation [1] au lieu de A, les arcs 90°, 88° 30′, 87°, et ainsi de suite jusqu'à 0°, puis — 1° 30′, — 3°, etc. jusqu'à — 19° 30′ inclusivement; au-delà de cet arc, l'équation [1] n'a plus lieu, parce que ses valeurs deviennent plus grandes que l'unité.

205. Nous allons maintenant continuer la recherche des autres équations.

Toute distance du point b des points de la circonférence, qui sera plus petite que le diamètre 2, pourra être corde d'un arc. Nommons B' l'arc qui a pour corde la distance $b\,Z$, on aura $\frac{b\,Z}{2} = sin.\,\frac{1}{2}\,B'$; et nommant B l'arc BZ, on aura $Z\,z = 2\,sin.\,B$; puis, divisant par 4 l'équation [B] du n.° 196, on aura :

$$sin.\tfrac{1}{2}B' = \frac{1-cos.\,B'}{2}\,[155] = \frac{5-\sqrt{5}}{8} - sin.\,B\,.\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}:$$

d'où $cos.\;B' = 1 - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right) - sin.\;B.\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$= 1 - 2\;sin.^2\,36^o - 2\;sin.\;B.\,sin.\;18^o$

$= cos.72^o - cos.(B-18^o) + cos.(B+18^o)$ [155, 158] :

donc on aura :

[2] $cos.B' = sin.18^o + cos.(B+18^o) - cos.(B-18^o)$.

206. Pareillement si on nomme E' l'arc qui a pour corde la distance $e\,Z$, et E l'arc $B\,Z$, l'équation [E] du n.° 196 donnera :

$$sin.^2\,\tfrac{1}{2}\,E' = \frac{1-cos.\,E'}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{4} - sin.\;E.\;\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2};$$

d'où où tire :

$$cos.\;E' = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} + 2\;sin.\;E\;.\;\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}$$

$$= sin.\,45^o - sin.\,30^o + 2\,sin.\,E\;sin.\,22^o30'\,;$$

et enfin :

[3] $cos.\;E' = sin.\;45^o - sin.\;30^o$

$+ cos.\,(E - 22^o\,30') - cos.\,(E + 22^o\,30')$.

207. Au moyen de ces trois équations, un

arc A, B ou E étant donné, on aura, avec les tables des sinus et cosinus naturels, et par de simples additions ou soustractions, les cosinus et les arcs A', B' et E', qui ont pour cordes les distances aZ, bZ, eZ, que l'on trouvera être les mêmes, en doublant le sinus de la moitié des arcs A', B', et E'.

208. Réciproquement si la distance aZ est égale à une corde d'un arc connu A', et si on cherche de quel arc Zz deviendra la corde, ou de combien de degrés deviendra l'arc BZ, qui en est la moitié, et est $= A$; de l'équation [198] :

$$a^2 = 3 - 2\,sin.\ A \sqrt{2};$$

on tirera $sin.\ A = \frac{3 - a^2}{2\sqrt{2}}$; et substituant la valeur de $a^2 = 4\,sin.^2 . \frac{1}{2} A' = 2 - 2\,cos.\ A'$ [155], on aura : $sin.\ A = \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} + cos.\ A' \sqrt{\frac{1}{2}}$ $= sin.\ 30° . sin.\ 45° + cos.\ A'\ sin.\ 45°$; et [156, 158] comme $sin.(45° + A') = cos.(45° - A')$ on aura cette équation : [4] $sin.\ A =$ $\frac{1}{2}(sin.\ 45° + sin.\ (45° - A') + cos.\ (45° - A'))$.

229. De même si on connoît l'arc B', qui a pour corde la distance bZ, et si on cherche l'arc $B = BZ$ par le moyen de Zz,

qui est la corde de $2B$, en multipliant l'équation [B] du n.° 196 par $\sqrt{5}+1$; et à cause de $(bB)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, et de $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, on aura : $(bZ)^2 . (\sqrt{5}+1) = 2\sqrt{5} + 4 sin. B$; et substituant pour $(bZ)^2$ sa valeur

$$4 \, sin.^2 \tfrac{1}{2} B' = 2 - 2 \, cos. B' . \; [155],$$

on aura, après avoir fait les réductions :

$$sin. B = \tfrac{1}{2} - 2 \, cos. B' . \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right).$$

Or Bb, étant le côté du pentagone $= \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$ corde de 72°, sera

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} = sin. 36° ;$$

d'où : $\tfrac{1}{4} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = sin.^2 36°$;

or : $1 - sin.^2 36° = cos.^2 36° = sin.^2 54°$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 :$$

d'où on tirera $sin. B = \frac{1}{2} - 2 \, cos. B' \, sin. 54°$; et enfin [156]

$$[5] \quad sin. B = sin. 30° - sin. (54° + B') - sin. (54° - B').$$

210. De même si on connoît l'arc E', qui a pour corde la distance eZ, et si on cherche le degré de l'arc $BZ = E$, égal à la moitié de l'arc qui a pour corde $Zz = sin. E$, en substituant dans l'équation [E] du n.° 196 pour $(eZ)^2$ sa valeur $2 - 2 \, cos. E'$;

pour $(eB)^2$ sa valeur $3 - \sqrt{2}$, et pour AE sa valeur $\sqrt{(2 - \sqrt{2})} = 2\ sin.\ 22^\circ\ 30'$. [198. 38], on aura :

$$2\ sin.\ E \sqrt{(2 - \sqrt{2})} = 2\ cos.\ E' + 1 - \sqrt{2};$$

ce qui, en multipliant par $\sqrt{(2 + \sqrt{2})}\sqrt{2}$ donne :

$$4\ sin.\ E = 2\ cos.\ E' \cdot \sqrt{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$$
$$- (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$$
$$= 2\ cos.\ E' \sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2})\sqrt{(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2\ cos.\ E' \sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})}\sqrt{2};$$

puis divisant par 4, et considérant que l'on a : $\sqrt{(2 + \sqrt{2})} = 2\ sin.\ 67^\circ\ 30'$ [37], et $\sqrt{2} = 2\ sin.\ 45^\circ$, on aura [156, 157, 158] :

$sin.\ E = 2\ cos.\ E'\ sin.\ 67^\circ\ 30'\ sin.\ 45^\circ - sin.\ 22^\circ\ 30'\ sin.\ 45^\circ$, ou $sin.\ E = cos.\ E' \left(cos.(67^\circ 30' - 45^\circ) - cos.(67^\circ 30' + 45^\circ) \right) - sin.\ 22^\circ\ 30'\ sin.\ 45^\circ$;

ou bien $sin.\ E = cos.\ E'\ cos.\ 22^\circ\ 30' + cos.\ E'\ sin.\ 22^\circ 30' - sin.\ 22^\circ 30'\ sin.\ 45^\circ$;

ou enfin :

$$[6]\ sin.\ E = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} cos.\ (E' + 22^\circ\ 30') + sin.\ (E' + 22^\circ\ 30') \\ + sin.\ 22^\circ\ 30' + cos.\ (E'\ 22^\circ\ 30') \\ - sin.\ (E' - 22^\circ\ 30') - cos.\ 22^\circ\ 30' \end{array} \right\}.$$

211. Ainsi des trois équations [A], [B], et [E] nous en avons tiré six au moyen desquelles, des arcs étant donnés, nous pourrons

en obtenir de nouveaux, ainsi que leurs nouvelles cordes, à l'aide des trois seuls points a, b et e.

212. Comme il peut y avoir une infinité d'arcs, chacune de ces équations donne une infinité de solutions. Mais si on ne veut avoir la valeur que des arcs que l'on peut trouver par le moyen des mêmes points a, b et e, on en trouvera 120 pour chaque équation, quand il n'y aura de limites particulières pour aucune d'elles. En effet, on pourra, par le moyen de ces trois points, diviser la circonférence en 240 parties égales (57), et par conséquent la demi-circonférence en 120; on aura donc 60 points Z et 60 points z, qui pris ensemble détermineront 120 cas pour chaque équation. Mais aucune d'elles n'aura de limites particulières.

213. Si on vouloit prendre avec le compas, par exemple, la corde de 3°, c'est-à-dire, de la cent vingtième partie de la circonférence (42), et décrire un arc en plaçant en a la pointe du compas, cet arc ne pourroit couper la circonférence en aucun point Z, attendu que sa corde est plus petite que la distance $aF = \sqrt{2} - 1$. On ne pourra donc pas dans l'équation [4] mettre au lieu de A' l'arc de

3°, et si on veut le faire, on trouvera pour *sin. A* une valeur plus grande que l'unité, c'est-à-dire, une valeur absurde. Pour voir quel est le premier arc qu'on pourra mettre à la place de A' entre les arcs de la série 1° 30′, 3°, 4° 30′, etc. on observera quel est l'arc qui a pour corde la distance *a F*, qui est la plus petite entre le point *a* et le cercle, et qui est égale à $\sqrt{2}-1=2 \sin. 45^\circ-\frac{1}{2}=0{,}91421356$ $=\cos. 23^\circ\ 54'+$. Donc le premier arc qu'on puisse employer de ceux qu'on trouve par le moyen des trois points *a*, *b* et *e* sera celui de 24°. Après cet arc, on pourra employer tous les autres arcs de la suite 25° 30′, 27°, 29° 30′ jusqu'à 180°; car les cordes de tous ces arcs peuvent être des distances du point *a* à quelque point *Z* ou *z* de la circonférence.

214. Les équations [5] et [6] sont plus limitées; car dans l'équation [5] on ne peut pas employer les arcs B' dont la corde est plus petite que *b f* ou plus grande que *b F*: de même l'équation [6] n'admet aucun des arcs E' dont la corde est plus petite que *e F* et plus grande que *e f*.

215. Nous verrons dans la suite dans quel cas on peut se servir avantageusement de quelques-unes de ces valeurs pour la division du

cercle ou pour quelqu'autre problême qu'on ne peut résoudre que par approximation, en choisissant celles qui approchent le plus de la valeur qu'on cherche, et se déterminent en même-tems par des sections d'arcs qui diffèrent moins de l'angle droit.

216. Pourtant, afin de retirer tous les avantages possibles des trois points *a*, *b* et *e* sans en introduire de nouveaux, des trois équations [*A*], [*B*] et [*E*] nous en tirerons six autres pour avoir de nouvelles valeurs d'arcs et de cordes.

217. Soit *B Z* un arc connu, par exemple, un de ceux qu'on obtient par les problêmes du livre second et nommons *B* cet arc; on prendra avec le compas la distance *b Z*, qu'on portera de *a* à quelqu'autre point *Z'* qui détermine un autre arc $BZ' = A$, et comparant les deux équations [*A*] et [*B*], on en tirera une nouvelle équation qui fait connoître sa valeur. En effet, si dans ces deux équations, on fait $bZ = aZ'$, en faisant dans la première [*A*] $Zz = 2\ sin.\ A$, puis dans la seconde [*B*] $Zz = 2\ sin.\ B$, on aura:

$$(aB)^2 - 2\ sin.\ A . Aa = (bB)^2 + 2\ sin.\ B . Ab,$$

ou bien [198]:

$$3 - 2\ sin.\ A . \sqrt{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} + sin.\ B(\sqrt{5} - 1);$$

et dégageant *sin. A*, on aura :

$sin. A = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\, sin. B . \frac{\sqrt{5}-1}{4} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$= sin. 54^\circ\, sin. 45^\circ - 2\, sin. B . sin. 18^\circ\, sin. 45^\circ$ [209]

$= \tfrac{1}{2}(cos. 9^\circ + sin. 9^\circ) - sin. B (cos. 27^\circ - sin. 27^\circ)$ [158] ;

d'où (155 et suiv.) :

$$[7]\; sin. A = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} cos. 9^\circ + sin. 9^\circ \\ + cos. (B - 27^\circ) - sin. (B - 27^\circ) \\ - cos. (B - 63^\circ) + sin. (B - 63^\circ) \end{array} \right\}$$

218. On ne pourra pas non plus prendre ici pour *B* tous les arcs, mais seulement ceux qui donnent une distance *b Z* ou *b z* qui ne soit pas plus petite que *a F*.

219. Maintenant soit connu un arc *B Z* que l'on nomme *A*, si on porte la distance *a Z* prise avec le compas de *b* à quelqu'autre point *Z'* de la même circonférence, qui détermine l'arc *B Z'* = *B*, on connoîtra cet arc *B*, et si on veut sa corde, en dégageant *sin. B* de l'équation [217]

$sin. A = \frac{\sqrt{5}+1}{4} . \sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\, sin. B . \frac{\sqrt{5}-1}{4} . \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$

Multipliant cette équation par le facteur $2(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$, on aura :

$2\, sin. A (\sqrt{5}+1)\sqrt{2} = 3 + \sqrt{5} - 4\, sin. B$;

d'où on tire :

$sin. B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 4\, sin. A . \frac{\sqrt{5}+1}{4} . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$= 2\, sin.^2 54^\circ - 4\, sin. A\, sin. 54^\circ\, sin. 45^\circ$ [209] ;

et traitant comme ci-dessus les équations [155 et suiv.], on aura enfin :

[8.] $sin. B = 1 + sin. 18^o - sin. (A + 9^o)$
$+ cos. (A + 9^o) - sin. (A - 9^o) - cos. (A - 9^o)$.

220. On ne pourra pas dans cette équation [8] employer pour A les arcs $B Z$ qui donnent une distance $a Z$ plus grande que $b F$.

221. Actuellement si dans l'équation [A] du n.° 196, on fait $Z z = 2\ sin.\ A$ et dans l'équation [E] une autre distance $Z z = 2 sin. E$, en faisant en outre dans ces deux équations $(a Z)^2 = (e Z)^2$, on aura, après les substitutions nécessaires (198) :

$3 - 2\ sin. A . \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} - 2\ sin.\ E \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$;
$sin.\ A = \frac{1}{2} + 2\ sin.\ E . \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2} . \sqrt{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2} + 2\ sin.\ E\ sin.\ 22^o\ 30'\ sin.\ 45^o$, et [158]
$= \frac{1}{2} + sin.\ E\ cos.\ 22^o\ 30' - sin. E\ sin.\ 22^o\ 30'$;
d'où enfin [156, 158] :

$$[9]\ sin.\ A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} + sin. (E + 22^o 30') \\ + cos. (E + 22^o 30') \\ + sin. (E - 22^o 30') \\ - cos. (E - 22^o 30') \end{array} \right\}.$$

222. On peut encore trouver cette neuvième équation d'une autre manière pour rendre le calcul plus facile par le moyen des sinus et cosinus artificiels que l'on trouve dans les

tables de dix en dix secondes. C'est pourquoi comme on a :

$$sin.\ A = \tfrac{1}{2} + 2\ sin.\ E \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}} + sin.\ E\right) \frac{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} + sin.\ E\right) \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

$$= (sin.\ 67^{o}\ 30' + sin.\ E) \frac{sin.\ 22^{o}\ 30'}{sin.\ 45^{o}}\ [37];$$

et faisant $67^{o}\ 30' = p$; $E = q$, on aura [156] :

$$(9) | sin.\ A = \frac{sin. \frac{67^{o}\ 30' + E}{2}\ cos. \frac{67^{o}\ 30' - E}{2}}{cos.\ 22^{o}\ 30'};$$

équation qu'il sera facile de calculer par le moyen des logarithmes des sinus et des cosinus.

223. Si donc on prend avec le compas une distance du point *e* à un point quelconque *Z*, extrémité d'un arc connu $BZ = E$, et qu'on la porte du point *a* à quelqu'autre point Z' de la circonférence, on connoîtra le nouvel arc $BZ' = A$ par le moyen de l'équation [9] ou de celle (9). Ces équations auront leurs limites, puisque l'arc BZ devra être tel que la distance eZ ne soit pas plus petite que aF.

224. On a trouvé [221] :

$$2\ sin.\ A\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\ sin.\ E . \sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

multipliant cette équation par $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$, on aura :

$2\ sin.\ A \sqrt{(2+\sqrt{2})} = \sqrt{(2+\sqrt{2})} + 2\ sin.\ E$;

d'où $sin.\ E = 2\ sin.\ A . \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$

$= 2\ sin.\ A . sin.\ 67^{\circ}\ 30' - sin.\ 67^{\circ}\ 30'$ [37];

d'où [158] :

[10] $sin.\ E = cos.(A - 67^{\circ}\ 30') - cos.(A + 67^{\circ}\ 30') - sin.\ 67^{\circ}\ 30'$.

225. On peut encore préparer autrement cette équation pour la rendre soluble par l'usage des logarithmes. En effet, puisqu'on a :

$sin.\ E = 2\ sin.\ (A - \frac{1}{2})\ \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$

$= 2\ (sin.\ A + sin.\ -30^{\circ})\ sin.\ 67^{\circ}\ 30'$

en faisant $A = p$; $-30^{\circ} = q$, on aura [156] :

[10] $sin.\ E = 4 sin.\ \frac{A - 30^{\circ}}{2} cos.\ \frac{A + 30^{\circ}}{2} sin. 67^{\circ} 30'$.

226. Il est évident que cette dixième équation aura aussi ses limites, puisque l'on ne pourra pas y introduire toutes les valeurs de l'arc BZ ou $Bz \pm A$, qui donneroient la distance aZ plus grande que ef.

227. Enfin on peut de la comparaison de l'équation [B] avec celle [E], tirer deux autres équations. Car si on porte une distance du point e à un point quelconque Z de la

circonférence, qui soit l'extrémité d'un arc connu $BZ=E$, et que du point b comme centre et de cette distance eZ prise pour rayon, on décrive un arc qui coupe la circonférence en quelqu'autre point Z' qui détermine l'arc $BZ'=B$, on connoîtra cet arc au moyen de son sinus de la manière suivante : soit fait dans l'équation [B] du n.° 196, $Zz=2\,sin.\,B$, dans celle [E] $Zz=2\,sin.\,E$, et dans toutes les deux $bZ=eZ$, on aura, après avoir fait les substitutions nécessaires [198] :

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}+sin.B\,(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{2}-2sin.E\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

d'où on tire :

$$2sin.B(\sqrt{5}-1)=\sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\,sin.E\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

et multipliant les deux membres de l'équation par $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$, on aura :

$$sin.B=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}-4sin.E\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}.\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$=2\,sin.^2\,54^\circ-2\,sin.\,54^\circ\,sin.\,45^\circ$$

$$-4\,sin.\,E\,sin.\,22^\circ\,30'\,sin.\,54^\circ\ [209];$$

d'où on tire [158] :

$$sin.\,B=1-cos.\,108^\circ-cos.\,9^\circ-sin.\,9^\circ$$

$$-2\,sin.\,E\,(cos.\,31^\circ\,30'-cos.\,76^\circ\,30');$$

et par conséquent [156] :

[11] $sin.\,B=1+sin.\,18^\circ-cos.\,9^\circ-sin.\,9^\circ$
$-sin.\,(E+31^\circ\,30')-sin.\,(E-31^\circ\,30')$
$+sin.\,(E+76^\circ\,30')+sin.\,(E-76^\circ\,30')$.

228. L'équation [11] aura aussi des limites de deux côtés; car la distance la plus petite $eF = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$, est moindre que celle $bf = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, et la plus grande ef est plus grande que bF.

229. Si on multiplie par $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4\sqrt{2}}$ l'équation

$$2\sin. B(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\sin. E\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

que l'on a trouvé plus haut [227], on aura :

$$\sin. E = 2\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$
$$- 4\sin. B\frac{\sqrt{5}-1}{4}.\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= 2\sin. 54^\circ \sin. 67^\circ 30' \sin. 45^\circ - \sin. 67^\circ 30'$$
$$- 4\sin. B \sin. 18^\circ \sin. 67^\circ 30' \sin. 45^\circ$$
$$= \sin. 67^\circ 30'(\cos. 9^\circ + \sin. 9^\circ) - \sin. 67^\circ 30'$$
$$- 2\sin. B. \sin. 67^\circ 30'(\cos. 27^\circ - \sin. 27^\circ)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sin. 76^\circ 30' - \cos. 76^\circ 30'$$
$$+ \sin. 58^\circ 30' + \cos. 58^\circ 30')$$
$$- \sin. 67^\circ 30' - \sin. B(\sin. 85^\circ 30'$$
$$+ \sin. 40^\circ 30' - \cos. 40^\circ 30' - \cos. 85^\circ 30');$$

d'où on a enfin :

$$[12]\ \sin. E = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\sin. 76^\circ 30' - \cos. 76^\circ 30'\\ + \sin. 58^\circ 30' + \cos. 58^\circ 30'\end{array}\right\} - \sin. 67^\circ 30'$$
$$- \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\cos.(85^\circ 30' - B) + \sin.(85^\circ 30' - B)\\ - \cos.(85^\circ 30' + B) - \sin.(85^\circ 30' + B)\\ + \cos.(40^\circ 30' - B) + \sin.(40^\circ 30' - B)\\ - \cos.(40^\circ 30' + B) - \sin.(40^\circ 30' + B)\end{array}\right\}$$

équation qui n'a pas de limites.

230.

230. Si par hasard quelqu'une des valeurs qu'on trouve avec ces douze équations est au premier abord très - approchante de quelque valeur utile et cherchée dans la solution des problêmes, on aura l'avantage de parvenir au même but par un moyen très-simple. Car on n'aura à employer d'autres points pris hors de la circonférence que les trois seuls points *a*, *b* et *e* que l'on a déjà remarqué tant de fois, et dans la circonférence quelqu'un de ceux qui servent à la division exacte de la circonférence par le moyen des solutions des problêmes du livre second. Nous allons actuellement donner quelques exemples.

231. Nous verrons d'abord comment on peut diviser le cercle à l'ancienne manière en degrés et minutes sans erreur d'une seconde. Pour cela, nous supposerons que la circonférence du cercle *BDd* [*fig.* 12], est divisée en deux cent quarante parties [57, 58] dont chacune comme $P\delta$ contient 1° 30′, que l'on commence à compter les quantités positives de *B* vers *F*, et de même les quantités négatives de *B* vers *f*, et que les points *Z* et *Z′* sont des points vagues soumis pour le moment à la seule condition de se trouver, savoir : les points *Z* et *Z′* entre *B* et *F* sur

la circonférence, et les points z et z' entre les points B et f. Nous en agissons ainsi, pour éviter le trop grand nombre de figures dont on auroit besoin si on en répétoit une pour chaque problême. D'ailleurs, la petitesse des divisions les laisseroit à peine appercevoir même dans une figure beaucoup plus grande que la figure 12.

PROBLÊME.

232. *Trouver* [fig. 12] *l'arc d'un degré de l'ancienne division, ou de* 1° *sans erreur d'une demi-seconde.*

I.ere *Solution.* Soit l'arc $Bz = -55° 30'$ [231]. Prenez avec le compas la distance bz, et du point e comme centre, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point Z; on aura l'arc $BZ = 52° 59' \frac{1732}{1751}$, c'est-à-dire, de 53° sans qu'il y manque vingt-cinq tierces. On a ensuite dans les divisions de B vers F exécutées par le problême du n.° 42, l'arc de $54° = \frac{18}{120}$. On aura donc aussi l'arc $54° - 53° = 1°$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on fait $B = -55° 30'$, on trouve à la fin du calcul $sin. E = 0,7986343 = sin. 52° 59' \frac{1739}{1751}$.

II.e *Solution*. Soit l'arc $BZ = 10° 30'$; du centre a et avec la distance bZ prise pour rayon, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z'; on aura l'arc $BZ' = 29° 29' \frac{2511}{2532}$, c'est-à-dire, $= 29° 30'$ sans erreur d'une demi-seconde. On trouve ensuite dans les divisions du cercle faites au n.o 58 l'arc de $28° 30' = \frac{19}{240}$ de la circonférence. Donc on aura la différence des deux arcs égale à 1° avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = 10° 30'$, on trouvera à la fin du calcul

$$sin.\, A = 0{,}4924215 = sin.\, 29° 29' \tfrac{2511}{2532}:$$

donc les arcs ne différeront pas de 29‴, de la valeur d'un degré.

233. Cette seconde solution est moins approchée que la première, de 5‴, mais les sections des arcs s'y font sous un angle qui diffère moins de l'angle droit.

234. Puisqu'on a l'arc de 1° 30′ [225], et qu'on a trouvé [226] l'arc de 1°, on aura aussi en soustrayant l'un de l'autre l'arc de 30′, ou le demi-degré, et par conséquent on aura la manière de diviser toute la circonférence en demi-degrés sans accumulation d'erreurs, et sans qu'aucun point soit éloigné, d'une demi-seconde, de sa véritable situation.

PROBLÈME.

235. *Trouver l'arc d'un quart de degré ou de 15′, sans erreur d'une tierce.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -12°$, la distance ez sera égale à la corde de 87° 15′; d'un rayon égal à cette distance prise avec le compas et du point B comme centre, coupez l'arc BF en un point Z', on aura l'arc $BZ' = 87° 15'$. On a de plus par les divisions du cercle faites au n.° 42 l'arc de $87° = \frac{29}{120}$ de la circonférence. On aura donc la différence de ces deux arcs $= 15'$.

Démonstration. Si dans l'équation [3] (206)
$cos. E' = sin. 45° - sin. 30° + cos. (E - 22° 30')$
$- cos. (E + 22° 30')$,
on fait $E = -12°$, on aura :

$$\begin{aligned} sin. 45° - sin. 30° &= 0,2071068 \\ cos. -34° 30' &= 0,8241262 \\ - cos. 10° 30' &= -1,0167451 \\ \hline cos. E' &= 0,0479781. \end{aligned}$$

Or dans les tables qui donnent les sinus naturels avec sept chiffres, on trouve 0,0479781 $= cos. 87° 15'$ sans aucune différence même dans le dernier chiffre. En employant ensuite plus de décimales, on trouve :

$$cos.\ E' = 0,0479780622$$

$$cos.\ 87^{\circ}.\ 15' = 0,047978128520;$$

et ne prenant que huit décimales, on a :

$$cos.\ 87^{\circ}\ 15'\ 1'' = 0,04797229.$$

On a donc pour 1″ la différence 584. Or si 584 donne 60‴ de différence, 7 donnera $\frac{105}{146}$ de tierces. On aura donc l'arc E', qui a pour corde la distance eZ', $= 87^{\circ}\ 15'$ avec une erreur plus petite que 1‴.

236. On pourra, par le moyen de ce problême, diviser la circonférence en 1440 parties, c'est-à-dire, en 1440 quarts de degrés sans qu'il y ait en aucun point de division une erreur de trois tierces. Car si on fait sur chaque arc $P\delta$ de 1° 30′ trois divisions de 15′ en 15′ de P vers δ et deux de δ vers P, l'arc $P\delta$ se trouvera divisé en six parties, dont chacune sera d'un quart de degré sans qu'il y ait erreur de 1‴ dans la position d'aucun point de division; il en sera de même pour le reste de la circonférence. D'après cela, nous supposerons dorénavant la circonférence divisée en degrés et quarts de degrés, en les considérant comme exacts, afin de simplifier le calcul. On pourra, quand on voudra, tenir compte des erreurs.

PROBLÈME.

237. *Trouver un arc de* 10′ *ou la sixième partie d'un degré, sans erreur de* 10‴ *ou de la sixième partie d'une seconde.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -49° 30'$; la distance bz sera égale à la corde de l'arc de 38° 50′ sans erreur de 10‴ : puis soustrayant l'arc de 38° 50′ de celui de $39° = \frac{13}{120}$ de la circonférence qu'on a par le n.° 42, on aura l'arc de 10′.

Démonstration. Si dans l'équation [2] on fait $B = -49° 30'$, elle deviendra :

$cos.\ B' = 0,7789738 = cos.\ 38° 49' \frac{1819}{1824}$;
on a donc $B' = 38° 50'$ à moins de 9‴ près.

238. Soustrayant d'un arc de 50′ auquel manquent 9‴ un arc de 45′ [236] auquel il manque quelques tierces, on aura l'arc de 5′ ou la douzième partie d'un degré sans qu'il y ait une erreur de 9‴.

PROBLÈME.

239. *Trouver l'arc de* 6′ *ou un dixième de degré sans erreur de* 13‴.

Solution. Soit l'arc $Bz = 45°$, c'est-à-dire, soit l'arc BG ; du point b comme centre et avec

la distance BG prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en z; on aura, sans erreur de 13''', l'arc $Bz = -40° 6'$.
et soustrayant [236] l'arc de. . . . . . . $-40°$;

on aura pour reste l'arc de. . . . . $6'$.

Démonstration. Si dans l'équation [5] on fait $B' = 45°$, elle deviendra :
$sin.\ B = -0,6441228 = sin. -40° 5' \frac{2217}{2225}$.
On aura donc l'arc $B = Bz = -40° 6'$ à moins de 12''' près.

240. Soustrayant de l'arc de $6'$ [239] l'arc de $5'$ [238], l'arc restant sera de $1'$ avec une erreur de quelques tierces. Mais on peut trouver immédiatement cet arc par le problême suivant.

PROBLÊME.

241. *Trouver immédiatement l'arc de* $1'$ *sans erreur de* 22'''.

Solution. Soit l'arc $Bz = -27°$; du point e comme centre et avec un rayon égal à la distance bz prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z. On aura l'arc $BZ = 29° 59'$ avec un excès de 10''' : donc l'arc BN étant de $30°$ [31], l'arc ZN sera de $1'$ avec 10''' de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on

fait $B = -27°$, on aura :

$sin. E = 0,4997496 = sin.\ 29° 59' \frac{15}{2519}$:
donc, etc.

PROBLÊME.

242. *Trouver l'arc de 9' sans qu'il y ait erreur de 7'''.*

Solution. Du point *e* comme centre, avec la distance *b K* prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en *z* ; on aura l'arc $B z = -4° 21'$ avec un excédent de 6''', lequel soustrait de $-4° 30'$ donne pour reste 9' sans erreur de 7'''.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on fait $B = 15° = BK$ [32], on aura :
$sin. E = -0,0758494 = sin. -4° 21' \frac{5}{2901}$:
donc l'arc $B z = -4° 21' 0'' 6'''$.
Ce problême servira encore à la nouvelle division du cercle, ainsi que nous le verrons ci-après [256].

243. L'arc de 15' manquant de moins de 1''' [235],
celui de 10' excédent de moins de 10''' [237],
celui de 6' manquant de moins de 13''' [239],
celui de 1' . . . . . de moins de 22''' [241],
et celui de 9' . . . . de moins de 7''' [242],
on pourra les combiner par addition ou sous-

traction, sans accumuler beaucoup les erreurs, de manière qu'à la fin toute la circonférence se trouve divisée en degrés et minutes, sans autre erreur que de très-peu de tierces. En effet, en doublant, par exemple, l'arc de 9′, on aura un arc de 18′ à moins de 14‴ près; et soustrayant de cet arc celui de 6′ approché à moins de 13‴, on aura l'arc de 12′ à moins d'environ 1‴. Soustrayant maintenant cet arc de celui de 15′ approché à moins d'une tierce [235], on aura l'arc de 3′ avec à peine une erreur d'une tierce. Par ce moyen, on pourra diviser en cinq parties chaque arc de 15′, et toute la circonférence se trouvera divisée de trois en trois minutes avec une erreur moindre de six tierces sur cette dernière division; erreur qui deviendra encore moindre, si on la porte en sens contraire de celle de trois tierces au plus qu'on commet dans la division de 15′ en 15′ [235]. Puis employant l'arc de 1′ qui a 4‴ de moins [240] à diviser chaque arc de 3′, on ne commettra plus une erreur de 10‴, et on aura divisé la circonférence en degrés et minutes.

On pourroit aussi combiner ces arcs ou d'autres tirés des douze équations précédentes, de manière que l'on parvînt à commettre de moindres erreurs, et nous emploierions

pour cela quelques problêmes, si d'un côté la division du cercle en 360° ne devoit pas avec le tems cesser d'être employée, et si d'ailleurs nous croyions que les artistes qui voudroient continuer à s'en servir, trouvassent ces recherches avantageuses pour la pratique. Nous ne croyons pourtant pas devoir omettre les problêmes suivans, dans la solution desquels nous supposerons que le cercle entier est divisé en anciens degrés et minutes que, pour la simplicité du calcul, nous considérerons comme exacts.

Problême.

244. *Trouver l'arc de 20″ ou un tiers de minutte qui ait à peine 1‴ de trop.*

I.ere *Solution.* On trouve [201] l'arc de 40″ avec moins d'une tierce de trop. Donc aussi l'arc de 20″, complément d'une minute, n'a pas tout-à-fait 1‴ de moins.

II.e *Solution.* Du point *e* comme centre et avec un rayon égal à la corde de l'arc de 61° 30′ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en *Z*; on aura l'arc $BZ =$ 20° 39′ 40″ avec à peine une tierce de trop; puis soustrayant cet arc de celui de 20° 40′,

l'arc restant sera de 20′ avec à peine 1‴ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [6] on fait $E' = 61° 30'$, en employant de plus grandes tables de sinus, on aura :

$$sin.\,BZ = sin.\,E = 0{,}35283991\,;$$

on a ensuite *sin.* 20° 39′ 40″ = 0,35283984.

Or *log.* 0,3528399 = 9,5475777

log. sin. 20° 39′ 40″ = 9,5475776

log. sin. 20° 39′ 50″ = 9,5476334

différence = 558.

Donc E surpasse l'arc 20° 39′ 40″ de $\frac{10}{558}$ environ, c'est-à-dire, de 1‴ et un peu plus.

PROBLÈME.

245. *Trouver l'arc de 15″ ou un quart de minute à moins de 10‴ près, ou environ.*

Solution. Du point e comme centre, avec un rayon égal à la corde de 31° 30′ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en un point Z; on aura l'arc $BZ = 57° 30' 15''$ à 9‴ de moins près.

Démonstration. Si dans l'équation [6] on fait $E' = 31° 30'$, on trouvera $E = 57° 30' \frac{386}{1563}$; mais on a $\frac{390}{1563} = \frac{1}{4}$. Donc ce qui lui manque est de $\frac{4}{1563}$ environ, c'est-à-dire, d'environ 10‴.

PROBLÊME.

246. *Trouver l'arc de* 12″, *ou un cinquième de minute à* 1‴ *de moins près ou environ.*

Solution. Soit $Bz = -10^{\circ}\,30'$; du point a comme centre et d'un rayon égal à la distance bz prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z : on aura l'arc $BZ = 40^{\circ}\,40'\,12''$ avec environ 1‴ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = -10^{\circ}\,30'$, on trouvera par le calcul $A = 40^{\circ}\,40'\,\frac{440}{2206}$. Or on a $\frac{441}{2206} = \frac{1}{5}$: on a donc en moins une erreur de $\frac{1}{2206}$, c'est-à-dire, de 1‴ environ.

Si on avoit fait le calcul avec de plus grandes tables, on auroit relevé l'erreur avec plus de précision.

PROBLÊME.

247. *Trouver l'arc de* 10″ *ou un sixième de minute qui surpasse d'environ* 1‴.

Solution. Soit l'arc $Bz = -24^{\circ}$. Du point a comme centre et d'un rayon égal à la distance ez prise avec le compas, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en Z ; on aura

l'arc $BZ = 16^{\circ}\ 15'\ 10''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [9] on fait $E = -24^{\circ}$, on trouvera pour résultat :

$$log.\ sin.\ A = 9,4469652.$$

Ce logarithme se trouve être celui du sinus de $16^{\circ}\ 15'\ 10''\ \frac{20}{722}$: donc l'excès ne va pas à deux tierces.

PROBLÈME.

248. *Trouver l'arc de 5″ ou d'un douzième de minute avec une erreur inappréciable par les tables ordinaires et moindre que 2‴.*

I.ere *Solution.* Soit l'arc $BZ = 4^{\circ}\ 30'$; du point a comme centre avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 32^{\circ}\ 51'\ 5''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 4^{\circ}\ 30'$, on aura pour résultat :

$$log.\ sin.\ A = 9,7343692\ ;$$

or $log.\ sin.\ 32^{\circ}\ 51' = 9,7343529$,

et la différence est 163 ; de plus, dans les tables, la différence pour dix minutes est 326,

c'est-à-dire, précisément double de 163 ; donc, etc.

En calculant l'erreur avec de grandes tables, on la trouve moindre que 2‴.

II.e *Solution*. Soit l'arc $BZ = 31^\circ\ 30'$. Du centre a avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 51^\circ\ 30'\ 55''$ trop petit de moins d'une tierce.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 31^\circ\ 30'$, on trouvera par le moyen des tables ordinaires :

$log.sin.A = 9{,}8936365 = log.sin.51^\circ 30'\ 50''\ \frac{84}{167}$;

laquelle fraction $\frac{84}{167}$ se comparant à $10''$, donnera $5''$ avec un excès moindre de 1‴. On aura donc $A = 51^\circ\ 30'\ 55''$, lequel arc soustrait de $51^\circ\ 31'$ donnera $5''$ avec l'approximation demandée.

Mais il est tems de passer à la démonstration de l'usage qu'on peut faire des douze équations précédentes quand on veut diviser la circonférence du cercle suivant la nouvelle manière des Français.

249. Suivant cette manière, la circonférence se trouve divisée en 400 degrés, afin que le quart de cercle qui est le fondement de toute

la trigonométrie soit par-là divisée en 100 degrés. Chaque degré est divisé en 100 minutes, chaque minute en 100 secondes, et ainsi de suite. On peut, si on veut, se dispenser de dénommer les degrés, minutes ou secondes, la position des décimales faisant assez connoître la nature de ces fractions.

250. Par conséquent on voit que neuf degrés anciens valent 10 degrés nouveaux, ou bien que $9^o = 0,10$; que $54' = 0,01$; que $27' = 0,005$; que $5'\ 24'' = 0,001$; que $32''\ 24''' = 0,0001$; c'est-à-dire, qu'un degré nouveau vaut 54 minutes anciennes, qu'une minute nouvelle vaut $32''\ 24'''$ de l'ancienne division, etc.

251. Les divisions obtenues exactement par le moyen des trois points *a*, *b*, et *e* dans le second livre donnent jusqu'à la 240.me partie de la circonférence [59]. L'arc qui forme cette partie est exactement de $1^o\ 30'$ de l'ancienne division. Il ne s'exprime pas également avec un nombre fini de décimales dans la division moderne; le premier arc, formé par l'assemblage de plusieurs 240.mes, qu'on exprime avec un nombre fini de décimales du quart de cercle est celui de $\frac{1}{240}$ ou de $\frac{1}{80}$ de la circonférence, lequel est de $4^o\ 30' = 0,05$ du quart de cercle, c'est-à-dire, de 5 degrés de la nouvelle divi-

sion. On peut donc avec les méthodes du livre second et par le moyen des trois seuls points *a*, *b* et *e* pris hors de la circonférence, la diviser en deux parties égales, chacune de cinq degrés modernes, et cela avec la précision géométrique, ce qui est un des avantages de cette Géométrie.

252. On pourroit, si on vouloit, par la division des arcs en deux parties égales [60], diviser ensuite la circonférence en arcs de deux degrés et demi chacun ou de 0,025 et continuer ainsi cette division; mais il est clair que par ce moyen on ne pourra pas avoir un degré avec précision. Il ne reste donc d'autre moyen à la Géométrie, pour obtenir l'arc d'un degré [63], que celui de chercher quelque construction qui le donne au moins par approximation.

PROBLÊME.

253. *Trouver l'arc d'un nouveau degré, ou de* 0,01 *sans qu'il excède d'un sixième de seconde de la nouvelle division ou de* 3 *tierces de l'ancienne.*

Solution. Prenez avec le compas la corde de 138° de l'ancienne division, ou de quarante-six vingtièmes de la circonférence [42], et

et du point a comme centre, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z, l'arc Bz sera de 11 degrés de la nouvelle division; d'où soustrayant l'arc de $9^o = 0,10$ [252], on aura pour reste un arc $= 0,01$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si, dans l'équation [4], on fait $A' = 138^o$, on aura :

$$sin. A = \tfrac{1}{2} (sin. 45^o + sin. 183^o + sin. -93^o)$$
$$= \tfrac{1}{2} (sin. 45^o - sin. 3^o - sin. 87^o).$$

On a ensuite $-sin. 3^o = -0,0523360$

$-sin. 87^o = -0,9986295$

$sin. 45^o = 1,2928932$

$-0,3438587$

$-0,1719293$

On a de plus $sin. 9^o 54' = 0,1719291$

$sin. 9^o 55' = 0,1722156.$

Donc l'arc $Bz = A = 9^o 54'$, avec le seul excès de $\frac{2}{2865}$ d'une minute de l'ancienne division, c'est-à-dire, sans qu'il y ait un excédent de $4'''$, et par conséquent sans qu'il y ait erreur d'une seconde de la nouvelle division.

254. On pourroit, avec des tables un peu plus étendues que celles ordinaires, rechercher cette erreur avec plus de précision. Dans tous les cas, elle est si petite, qu'en

l'accumulant encore deux ou trois fois, elle ne seroit pourtant pas sensible dans les plus grands quarts de cercle. Or, dans leurs divisions, on n'a pas besoin de l'accumuler plus de deux fois; car on a déjà, avec la précision géométrique, l'arc de 0,05 [251]. Si sur cet arc on trace deux divisions d'un degré en commençant des deux extrémités, et allant en sens contraire, on aura marqué sur cet arc quatre points qui en donneront la division en cinq degrés, et chacun de ces points ne sera pas éloigné de sa véritable position de six tierces entières de l'ancienne division, ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.

255. D'après ce problême, on supposera maintenant la circonférence divisée en 400 degrés de la nouvelle division.

PROBLÊME.

256. *Trouver l'arc d'un nouveau demi-degré, sans qu'il y ait excès de six tierces de l'ancienne division ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.*

Solution. Prenez avec le compas la distance du point *b* au point *K*, et du point *e*

comme centre avec ce rayon bK, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point z, vous aurez l'arc $Bz = -4^{\circ}\ 21'$, avec un excès moindre que $7'''$; soustrayez en un arc de $3^{\circ} = Np$ [43], il viendra pour reste $1^{\circ}\ 21'$, c'est-à-dire, un degré et demi de la nouvelle division; alors de tous les points des degrés [225] pris pour centre, et d'un rayon égal à la corde de cet arc, on pourra diviser tous ces mêmes degrés en deux parties égales.

Démonstration. Si dans l'équation (12) on fait $B = BK = 15^{\circ}$ [32], on aura $E = -4^{\circ}\ 21'\ \frac{5}{2901}$. Donc, etc. [242].

PROBLÈME.

257. *Trouver l'arc d'un cinquième de degré de la nouvelle division, sans qu'il y ait excès d'une seconde ancienne.*

Solution. Du point e comme centre, avec un rayon égal à la corde de 51°, prise avec le compas, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en Z, l'arc BZ sera de trente-sept degrés nouveaux plus un cinquième de degré avec la précision demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [6]

on fait $E'=51°$, on aura :
$E=33° \ 28' \frac{1968}{2426} = 33° \ 28' \ 48'' \frac{1632}{2426}$.
Mais $33° \ 28' \ 48'' = 0{,}372$. Donc, etc.

PROBLÈME.

258. *Trouver l'arc de 4 dixièmes d'un nouveau degré, sans qu'il y ait excès de 16‴ anciennes.*

Solution. Soit l'arc $BZ=76° \ 30'$; puis du point a comme centre, et d'une ouverture de compas $=bZ'$, prise pour rayon, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en un point Z'; on aura l'arc $BZ'=0{,}094$, c'est-à-dire, de neuf nouveaux degrés et quatre dixièmes, avec l'excès indiqué.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B=76° \ 30'$, elle deviendra $A=8° 27' \frac{1738}{2877}$. Mais $8° \ 27' \frac{1726}{2877}=0{,}094$. Donc, etc.

PROBLÈME.

259. *Diviser un degré de la nouvelle division en dix parties égales.*

Solution. Après avoir divisé cet arc en deux parties égales [256], ôtez de l'arc de 0,005 les arcs de 0,004 [258] et de 0,002 [257],

et on aura les arcs de 0,001, et de 0,003; avec une erreur de quelques tierces de l'ancienne division seulement; on aura donc tous les arcs, par la division de l'arc de 0,005 en cinq parties; et divisant ensuite de la même manière l'autre moitié de l'arc, il sera divisé en dix parties égales.

260. On pourra soustraire et ajouter ces arcs de manière que balançant les erreurs en plus et en moins, on obtienne exactement la millième partie d'un nouveau degré : on pourra donc par la suite supposer le quart de cercle divisé en millièmes ou de dix en dix nouvelles minutes. On les considérera comme exacts, pour la simplicité du calcul.

PROBLÈME.

261. *Trouver l'arc d'une nouvelle minute, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit un arc $Bz = -1^\circ 30'$; la distance az sera corde d'un arc de 1,3609, sans erreur d'une tierce ancienne. Soustrayant cet arc de celui de 1,361 [260], on aura l'arc de 0,0001.

Démonstration. Si dans l'équation [1] on

fait $A = -1^\circ 3'$, elle devient $A' = 122^\circ 28' \frac{2111}{2454}$ $= 122^\circ 28' 51' 36''' = 1,3609$ [250]. Donc, etc.

PROBLÈME.

262. *Trouver l'arc de deux nouvelles minutes, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -48^\circ$; la distance bz sera corde d'un arc de 0,4422 avec la précision demandée. Soustrayant de cet arc celui de 0,442 [260], l'arc restant sera de 0,0002.

Démonstration. Si dans l'équation [2] on fait $B = -48^\circ$, elle devient :
$B = 39^\circ 47' \frac{1639}{1862} = 39^\circ' 52'' 48''' = 0,4422$ [250]. Donc, etc.

PROBLÈME.

263. *Trouver l'arc de trois nouvelles minutes, sans erreur d'une nouvelle tierce.*

Solution. Soit un arc $Bz = -78^\circ$; du point a comme centre, avec la distance ez prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z' ; on

aura l'arc $Bz' = -0,0187$ avec la précision demandée ; et soustrayant celui-ci de l'arc $= -0,019$ [260], on aura l'arc restant $= -0,0003$.

Démonstration. Si dans l'équation [9] on fait $E = -78°$, le sinus de A devient négatif ; en changeant les signes dans les deux membres de l'équation, on a *log. sin.* $A = 8,4678991$. Or dans les nouvelles tables de *Callet* pour la nouvelle division du cercle, on trouve :

$$8.4678990 = \textit{log. sin.}\ 0,0187 ;$$

puis de *log. sin.* $A = 8,4678991$
soustrayant $DS = 6,1960574$ (*V.* CALLET.)

on aura $2,2718417 = \textit{log.}\,187,00004$.

On a donc $A = -0,018700004$; l'erreur se trouve encore moins forte, si on emploie plus de chiffres dans les logarithmes.

264. On a pour la position du point dans les trois problêmes précédens, et spécialement dans le dernier, une telle approximation, qu'on n'en peut pas desirer une plus grande. Au moyen des arcs trouvés par ces problêmes, on peut diviser de plusieurs manières un millième du quart de cercle [260] en deux parties égales, c'est-à-dire en minutes de la nouvelle division du cercle.

265. On pourroit de même obtenir des divisions plus petites; mais il faudroit employer des tables plus grandes que celles dont je me suis généralement servi dans les calculs des douze équations précédentes. On pourroit aussi, si on en avoit besoin, étendre la division de la circonférence au-delà des minutes du nouveau systême français.

PROBLÈME.

266. *Dans un cercle d'un rayon donné* AB, *trouver une corde* B b *qui approche d'être égale au quart de la circonférence.*

Solution. Faites (*fig.* 101) sur la circonférence à $AB = BC = CD = DE$; puis à $BD = Ba = Ea$; du point C pris pour centre, et du rayon Ca, décrivez un arc qui coupe la circonférence en b, Bb sera la corde cherchée.

Démonstration. AB étant supposée $= 1$, si l'on fait $BC = A = 60°$ dans l'équation [1], on aura $A' = 43° 33' \frac{286}{2005} = Cb$. Donc l'arc BCb sera de $103° 33' \frac{286}{2005}$; sa moitié, qui est de $51° 46' \frac{1145}{2005}$, a pour sinus 0,7855998. Donc la corde Bb aura pour valeur 1,5711996;

le quart de la circonférence étant ensuite égal à 1,5707663, l'erreur ne sera donc que de 0,0004 environ.

267. Suivant le rapport d'Archimède, en supposant le rayon = 1, on trouve pour le quart de la circonférence $\frac{11}{7}$ — = 1,5714. Donc la construction du problême ci-dessus [266] donne une plus grande approximation. Cette construction étant d'ailleurs très-simple, il sera plus commode de l'employer dans la pratique que les autres que nous pourrions bien donner aussi; mais quoique susceptibles de donner dans la théorie un plus grand degré d'approximation, elles seroient plus compliquées, et par conséquent plus sujettes à erreur.

PROBLÊME.

268. *Dans un cercle d'un rayon donné* AB, *trouver l'arc qui approche le plus d'être égal au rayon.*

Solution. Faites sur la circonférence $BLCMFDOEd$ (*fig.* 102) à $AB = BC = CD = DE = Ed$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF = Db = db = aL$; à $AB = FO$, et enfin à $bF = OM$; l'arc LM

sera celui qui approchera le plus d'être égal au rayon.

Démonstration. Si dans l'équation [4] on fait $A' = 90°$, cet arc ayant pour corde aL, on aura $BL = A = 20° \; 42' \frac{786}{2721}$, comme on a de plus $OM = bF$ corde de la cinquième partie de la circonférence [40], ou de 72°, et l'arc $FG = 60°$, on aura l'arc $Fm = 12°$, et par conséquent l'arc $LM = BF\text{-}BL\text{-}FM = 57° \; 17' \frac{1935}{2721} = 57° 17' \; 43'' + \ldots$; on aura donc pour l'arc égal au rayon $57° \; 17' \; 44''$, comme on le sait déjà. Donc, etc.

PROBLÈME.

269. *Trouver le côté d'un quarré qui approche le plus d'être égal en surface à un cercle d'un rayon donné* AB.

Solution. Faites sur la circonférence $BPCQDRE$ (*fig.* 103), à $AB = BC = CD = DE$; du même rayon BA et des centres B et E, décrivez les deux arcs ALc, AMd; des centres C et D et du rayon DB, décrivez les arcs cNM, dNL; faites à $AN = BP = PQ$; puis à $LM = QR$, BR sera le côté cherché.

Démonstration. Si dans le triangle isoscèle CND on suppose la base $CD = 1$, divisée

en μ en deux parties égales, on aura $(CN)^2 = (C\mu)^2 + (N\mu)^2$, ou [2] $= 3 = \frac{1}{4} + (N\mu)^2$. Donc $N\mu = \frac{1}{2}\sqrt{11}$; ensuite on a $(Ca)^2 = (C\mu)^2 + (A\mu)^2$, et par conséquent $A\mu = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Donc on aura $AN = \frac{1}{2}(\sqrt{19} - \sqrt{2}) = 0{,}7922869$, valeur qui se trouve être celle de la corde de l'arc de $46^o\ 40'\ \frac{1272}{2671} = BP = PQ$. Donc l'arc BQ sera de $93^o\ 20'\ \frac{2544}{2671}$; tirez les droites BL divisées par le milieu au point n, BD, Dn, BE, et les perpendiculaires $D\delta$, Ll, Mm perpendiculaires à la même ligne BE aux points δ, l et m. L'angle DBE étant égal à 30° [20. *liv.* 3], on aura : *sin.* $DBE = \frac{1}{2}$; *cos.* $DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. On a ensuite, suivant les propositions de la trigonométrie : *cos.* $DBn = \frac{Bn}{DB}$; *sin.* $DBn = \frac{Dn}{DB}$ ou *cos.* $DBn = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; et comme l'on a

$$Dn = \sqrt{((DB)^2 - (Bn)^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{11},$$

on aura *sin.* $DBn = \frac{1}{6}\sqrt{33}$. On a ensuite [154] *cos.* $LBl = 6(DBn - DBE) =$ *cos.* $DBn.$ *cos.* $DBE +$ *sin.* $DBn.$ *sin.* $DBE = \frac{1}{12}(3 + \sqrt{33}) = \frac{Bl}{BL} = Bl$ (BL étant égal à $BA = 1$). Donc $Al = AB - Bl = \frac{1}{12}(9 - \sqrt{33})$, et par conséquent $lm = LM = 2Al = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{33}) = 0{,}5425729$, valeur qui est celle de la corde de $31^o\ 28'\ \frac{1518}{2799}$

$= QR$. Donc l'arc BQR sera de 124° 49′ $\frac{6370}{7476}$; sa moitié 62° 24′ $\frac{6923}{7476}$ a pour sinus 0,8863283, et par conséquent on aura la corde de $BQR = 1,7726566$. Or en faisant le rayon $= 1$, on a la surface du cercle $= 3,1415926$, qui a pour logarithme 0,4971499. La moitié de ce logarithme, c'est-à-dire, 0,2485749 $=$ *log.* $\sqrt{3,1415926}$ se trouve être *log.* 1,772453. On n'a donc qu'une errreur de 0,002 environ ; ce qui donne une approximation suffisante.

270. Au lieu de AN, on auroit pu employer les lignes dL ou cM, qu'on doit trouver égales à cette ligne AN.

Démonstration. Menez les droites dL et Dp au point p milieu de AN, on aura $\sin. LDp = \frac{Lp}{DL}$. Mais l'angle $LDp = \frac{1}{2} LDd$ $= \frac{1}{2}(BDd - BDL) = 30^\circ - BDn$. Donc [154] : $\sin. LDp = \frac{1}{2} \cos. BDn - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin. BDn$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3} ;$$

d'où $Lp = DL \sin. LDp = \frac{1}{4}\sqrt{11} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$, et $Ld = \frac{1}{2}\sqrt{11} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = AN$.

PROBLÈME.

271. *Etant donné le côté* AB *d'un quarré* [fig. 104], *trouver le rayon d'un*

cercle qui approche de lui être égal en surface.

Solution. Du centre A, avec le rayon AB, décrivez la circonférence $BCFDLPMEd$; faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B et avec le rayon BD, décrivez l'arc $dnNDa$; du centre E et avec le même rayon, coupez cet arc en a; faites à $Aa = BF = Db = db$, et à $AB = Dn = dN$; du centre C et avec le rayon CN, coupez la circonférence en P; faites à $Nn = PM$, et à $FB = CL$; on aura LM pour le côté cherché.

Démonstration. Si on fait $AB = 1$, le triangle BNd ayant les côtés respectivement égaux à ceux du triangle BDL de la fig. 103, on aura :

$sin. \frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6} \sqrt{3}$; $cos. \frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6} \sqrt{33}$ [270]; d'où :

$$sin.\, dBN = 2 sin. \tfrac{1}{2} dBN . cos. \tfrac{1}{2} dBN [154] = \tfrac{1}{6} \sqrt{11};$$

$$cos.\, dBN = \sqrt{(1 - sin.^2\, dBN)} = \tfrac{5}{6}.$$

De plus, l'angle CBd étant droit (31. *liv.* 3), on aura :

$$cos.\, CBN = sin.\, dBN = \tfrac{1}{6} \sqrt{11}.$$

Mais on a par la trigonométrie :

$$(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2 BC . BN . cos.\, CBN :$$

donc :

$$CN = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3} . \tfrac{1}{6} \sqrt{11})} = \sqrt{(4 - \tfrac{1}{3} \sqrt{33})}$$

$= 1,4440025$, que l'on trouve être la corde de $92^\circ\ 26'\ \frac{804}{2013} = CP$;

puis on a :

$sin.\ NBE = \frac{\frac{1}{2}Nn}{BN} = sin.\ (CBE - CBN)$

$= [154]\ sin.\ 60^\circ\ cos.\ CBN - cos.\ 60^\circ\ sin.\ CBN$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\ .\ \frac{1}{6}\sqrt{11} - \frac{1}{2}\ .\ \frac{5}{6}$;

on aura $Nn = 2BN\ .\ sin.\ NBE$

$= \frac{1}{6}(3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0,2149367$,

que l'on trouve être la corde de $12^\circ\ 20'\ \frac{946}{2892}$ $= PM$. On aura donc l'arc $CPM =$ $104^\circ\ 46'\ \frac{4220}{5821}$; d'où soustrayant l'arc CL, qui est un cinquième de la circonférence [40] $= 72^\circ$, il restera l'arc $LM = 32^\circ\ 46'\ \frac{4220}{5821}$ dont on trouve la corde $= 0,5643274$. Or nommant π le rapport de la circonférence au diamètre, et R le rayon du cercle, on a, comme on sait, sa surface $= \pi R^2$; faisant donc $\pi R^2 = 1$, qui est la surface du quarré du rayon $AB = 1$, auquel on veut que le cercle soit égal, on aura $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, et $log.\ R = -\frac{1}{2}\ .\ log.\ \pi = -0,2485749$ $= -1 + ,7514251 = log.\ 0,5641896$; l'erreur ne sera donc pas de 0,0002.

PROBLÈME.

272. *Etant donné le rayon* AB *d'une*

sphère [fig. 105], *trouver le côté d'un cube dont la solidité approche d'être égale à la moitié de celle de la sphère.*

Solution. Après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence $BGCDPEd$; faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B, avec le rayon BD, décrivez l'arc $aDNd$; du centre E, et avec le même rayon, soit coupé cet arc en a; faites à $AB = aG = dN$; et à $CN = CP$; PG sera le côté cherché.

Démonstration. En effet, on aura [271] CN corde de $92^\circ\ 26'\ \frac{804}{2013}$. On aura ensuite $GC = 15^\circ$ [32]; d'où $PG = 107^\circ\ 26'\ \frac{804}{2013}$ dont la corde, en faisant $AB = 1$, se trouve être égale à 1,6122696. Or dans la même hypothèse, et supposant le rapport de la circonférence au diamètre $= \pi$, on a la solidité de la sphère $= \frac{4}{3}\pi$, et son logarithme $= log. 4 + log. \pi - log. 3 = 0{,}6220886$, dont le tiers 0,2073628 se trouve être le logarithme de 1,611991; et par conséquent l'erreur qui en résulte ne va pas à 0,0003.

PROBLÊME.

173. *Etant donné le côté* AB *d'un*

cube [fig. 106], *trouver le rayon d'une sphère qui approche de lui être égale en solidité.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB, décrivez la circonférence $BLCMFDE$; faites à $AB=BC=CD=DE$; à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BF$; puis à $Fa=FM$, et à $FA=FL$; LM sera le rayon cherché.

Démonstration. On aura l'arc $FL=60°$ [15. *liv.* 4]. On a ensuite, en faisant $AB=1$,

$$aF=Aa-AF=\sqrt{2}-1\ [27]=0,4142136,$$

que l'on trouve être corde de $23° 54' \frac{976}{2846}$. On aura donc l'arc $LM=36° 5' \frac{1870}{2846}$, qui a pour corde 0,6195986. Or la solidité d'une sphère qui a R pour rayon, est, comme on sait, exprimée par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$: si on fait $\frac{4}{3}\pi R^3=1$, qui est la solidité du cube donné, on aura :

$$log.\ R=\frac{log.\ 3-log.\ 4-log.\ \pi}{3}$$

$$=-1+,7926371=log.\ 0,6203504.$$

Donc l'erreur en moins qui en résulte, ne va pas à 0,0008.

274. Comme toutes ces approximations dans la rectification, la quadrature et la cubature de la circonférence, du cercle et de

la

la sphère, et dans les problêmes inverses, ne font pas erreur d'une millième partie du rayon, on les regarde comme suffisantes dans la pratique. Quand on voudra pousser plus loin les approximations, il n'y aura autre chose à faire, qu'à trouver en degrés et minutes l'arc dont la quantité linéaire que l'on cherche est la corde ; puis tirer cette corde dans le cercle, après l'avoir divisé dans le nombre trouvé de degrés et minutes, en employant les méthodes précédemment démontrées [235, 243].

PROBLÊME.

275. *Doubler le cube par approximation.*

Solution. Soit AB le côté du cube qu'on veut doubler [*fig.* 107]; après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence $BQMNCFPDEde$, et y avoir fait à $AB=BC=CD=DE$; à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BF$; et à $FA=FN$; aN sera, à très-peu de chose près, le côté du cube double.

Démonstration. L'arc BN sera un douzième de la circonférence [31] $=30°$; si on fait cet arc $BN=A$ dans l'équation [1],

l'arc A', dont aN est la corde, sera $= 78° \; 2' \frac{2358}{2846}$. On a donc, en faisant $AB = 1$,

$$aN = 2 \; sin. \; 39° \; 1' \frac{1179}{2846} = 1,2592800.$$

On a ensuite $\sqrt[3]{2} = 1,2599209$.

L'erreur en moins qui en résulte n'est donc pas de 0,0007.

II.ᵉ *Solution*. Si on vouloit une plus grande approximation, après avoir fait la construction de la première solution, et avoir fait en outre à $AB = Ed = dc$; à $Aa = BF = Db = db$; à $aN = cM = MP$; à $Fb = FQ$; PQ sera le côté cherché, avec une approximation plus grande que dans la solution précédente.

Démonstration. Comme, pour la démonstration de la 1.ʳᵉ solution, on a l'arc $cM = 78° \; 2' \frac{2358}{2846} = MP$, on aura l'arc $cMP = 146° \; 5' \frac{1870}{2846}$; puis soustrayant l'arc $FQ = 72°$ [40] de l'arc $FBc = 150°$ [27, 29], on aura l'arc restant $cQ = 78°$; en le soustrayant de l'arc cMP, on aura l'arc $QP = 78° \; 5' \frac{1870}{2846}$, dont la corde se trouve être $= 1,2599190$; l'erreur en moins qui en résulte ne sera donc que de 0,000019, c'est-à-dire, à peine de deux millioniêmes de rayon.

PROBLÊME.

276. *Tripler, quadrupler, etc. et octupler le cube* [fig. 108].

Solution. Soit AB le côté du cube donné; du centre A et avec le rayon AB, décrivez la circonférence $B\omega G\mu C\varepsilon\nu FLDOEdc$; faites y à $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$; des centres B, c, d, E, D, avec le même rayon AB, décrivez les arcs $A\pi c$, Aqd, $c\beta A\delta E$, Apd, $A\tau E$; du centre B, avec le même rayon BD, décrivez l'arc $d\tau\delta Da$; du centre E et avec le même rayon, coupez cet arc en a; des centres C et D, et avec le même rayon, décrivez les arcs $cpqE$, $B\beta\pi d$; faites à $Aa=BF$; à $AB=FO=aG=GL$; à $EL=a\omega$; à $\pi\tau=B\varepsilon$; à $p\delta=B\mu$; et à $q\tau=\mu\nu$, on aura :

AO	pour côté du cube	double [275],
$C\delta$		triple,
OG		quadruple,
$O\omega$		quintuple,
$c\varepsilon$		sextuple,
$c\nu$		septuple,
BE		octuple.

Démonstration. Si on fait $AB=1$, on aura [271] : $C\delta=\sqrt{(4-\frac{1}{3}\sqrt{33})}=1{,}4422493$; on a ensuite $\sqrt[3]{3}=1{,}4422493$. Donc l'excès n'est pas de 0,002.

L'arc OFG étant de 105° [29, 30], sa corde OG sera égale à 2 *sin.* 52° 30′ = 1,5867066. On a de plus $\sqrt[3]{4} = 1,5874007$. Donc ce qui manque est de 0,0007 environ.

On aura ensuite l'arc $EL = \frac{5}{24}$ de la circonférence [32] = 75°; si dans l'équation [4], on fait $A' = 75°$, on a

l'arc $A = B\omega = 32° \; 27' \; \frac{27}{2454}$;

et comme $FO = 60°$ (15. *liv.* 4), on aura l'arc $OF\omega = 117° \; 32' \; \frac{2427}{2454}$, qui a pour corde 1,7102744. On a ensuite $\sqrt[3]{5} = 1,7099757$. Donc l'excès n'est pas de 0,0003.

Puisque $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$, et $D\tau = B\pi = 1$, on aura [23] :

$\pi\tau . BD = (BD)^2 - (B\pi)^2$, c'est-à-dire, $\pi\tau . \sqrt{3} = 2$; d'où $\pi\tau = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1,1547005$, que l'on trouve être la corde de $70° \; 31' \; \frac{1725}{2375} = B\varepsilon$. On aura donc l'arc $cB\varepsilon$, de $130° \; 31' \; \frac{1725}{2375}$, qui a pour corde 1,8164964. On a ensuite $\sqrt[3]{6} = 1,8171204$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,0007.

Les deux triangles $C\delta p$, $Bp\delta$ ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux (8. et 26. *liv.* 1); et comme ils sont sur la même base $p\delta$, les droites $p\delta$, BC seront parallèles entr'elles (39. *liv.* 1). On aura donc l'angle $CB\delta = B\delta p$ (27. *liv.* 1).

Donc $cos.\ CB\delta = \frac{1}{6}\sqrt{11}$ [271] $= cos.\ B\delta p$. On a ensuite par la trigonométrie :
$(Bp)^2 = (B\delta)^2 + (p\delta)^2 - 2B\delta . p\delta . cos.\ B\delta p$;
et les lignes Bp et $C\delta$ étant égales, puisqu'on les détermine par la même construction, on aura :
$4 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = 3 + (p\delta)^2 - 2p\delta . \sqrt{3} . \frac{1}{6}\sqrt{11}$;
d'où $1 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = (p\delta)^2 - p\delta . \frac{1}{3}\sqrt{33}$:
ajoutant dans les deux membres de l'équation le quarré de $\frac{1}{6}\sqrt{33}$, on aura :

$$(1 - \frac{1}{6}\sqrt{33})^2 = (p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33})^2 ;$$

d'où $p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33} = \pm(1 - \frac{1}{6}\sqrt{33})$.
On a ensuite [23] $p\delta . dE = (dE)^2 - (pd)^2$, c'est-à-dire, $p\delta = 1 - (pd)^2$, et par conséquent la ligne $p\delta$ est plus petite que l'unité ; puis on déterminera $p\delta = \frac{1}{3}\sqrt{33} - 1 = 0{,}9148541$, que l'on trouve être corde de l'arc de $54^\circ\ 26'\ \frac{1408}{2588}$. On a ensuite $q\tau = LM$ de la fig. 103 = la corde de l'arc de $31^\circ\ 28'\ \frac{2518}{2799}$ [269]. Donc l'arc $cB\mu\nu = 60^\circ + 54^\circ\ 26'\ \frac{1408}{2588} + 31^\circ\ 28'\ \frac{2518}{2799} = 145^\circ\ 55'\ \frac{1607}{3622}$, arc dont on trouve la corde $c\nu = 1{,}9122214$. On a ensuite $\sqrt[3]{7} = 1{,}9129309$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de $0{,}000702$; on a enfin $BE = 2 = \sqrt[3]{8}$. Donc, etc.

PROBLÈME.

277. *Sous-doubler le cube par approximation* [fig. 108].

Solution. Soit AB le côté du cube donné ; du centre A avec le rayon AB, décrivez la circonférence $BCDEd$, et faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B, avec le rayon BD, tracez l'arc $D\delta d$; du centre d, avec le rayon dA, tracez l'arc $A\delta E$; $D\delta$ sera le côté cherché.

Démonstration. La droite $D\delta$ de cette figure a été déterminée comme celle dL de la figure 103. On aura donc [269] $D\delta = 0{,}7922869$. Or on a $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}7937039$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,002.

278. Nous n'avons pas voulu omettre les solutions de ces deux derniers Problêmes, quoiqu'il y ait erreur dans quelques résultats, savoir : d'un ou deux millièmes dans les uns, et de quelques dix millièmes dans les autres, parce que ces erreurs sont souvent négligeables et que d'ailleurs les solutions en sont simples. On peut avoir des valeurs beaucoup plus exactes que les précédentes, pour former

des cubes, non-seulement dans les rapports ci-dessus exprimés, mais eucore dans d'autres, si on cherchoit les arcs exprimés en degrés, minutes et parties de minutes, qui ont pour cordes les racines cubiques, ou leurs moitiés, leurs tiers, etc. nécessaires pour la construction du cube cherché; on retireroit ensuite ces cordes du cercle divisé exactement en degrés, minutes, etc. [243, 244], et on les emploieroit ensuite, ainsi que leurs multiples, à la même construction du cube.

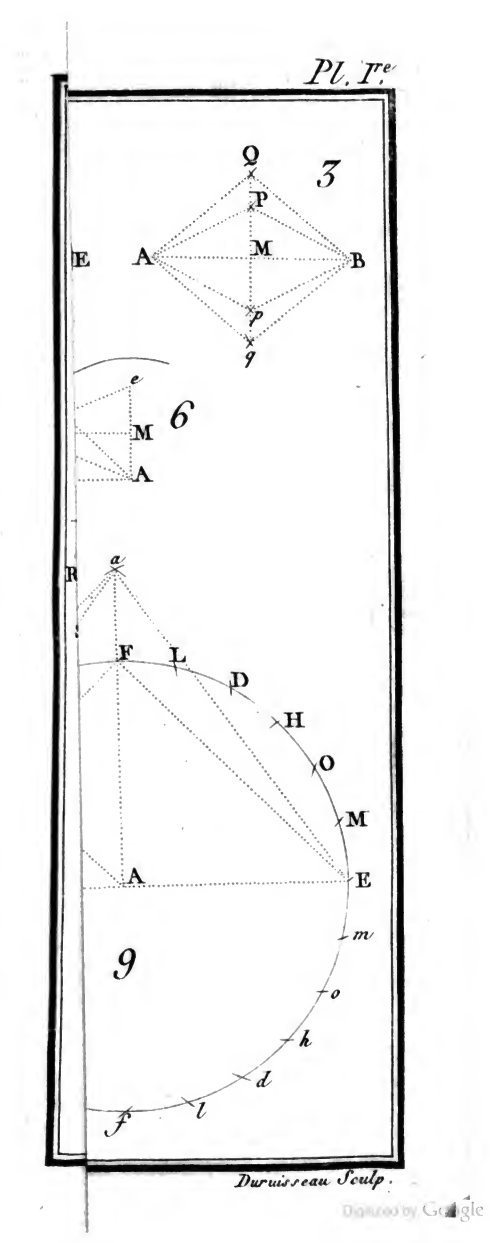
279. C'est ici que se termine enfin la Géométrie du Compas : si elle est accueillie favorablement des Géomètres, et si elle peut être de quelqu'utilité aux Artistes, aux Dessinateurs, et spécialement aux Ingénieurs en instrumens de mathématiques à l'usage des Géographes et des Astronomes, je me trouverai bien récompensé du long ennui que m'a coûté sa composition.

FIN.

TABLE.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de Legras et Cordier, rue du Plâtre S. Jacques, n.° 23.



Duruisseau Sculp.

Pl. 2e.

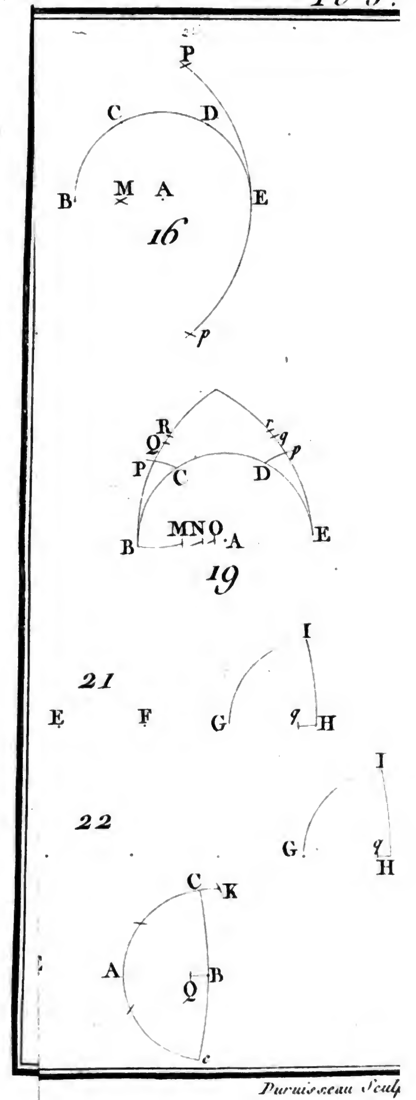
F
B γ G c C
13
D A E Q

I C G N μ K B k n g c i

H S O ν M E m o h

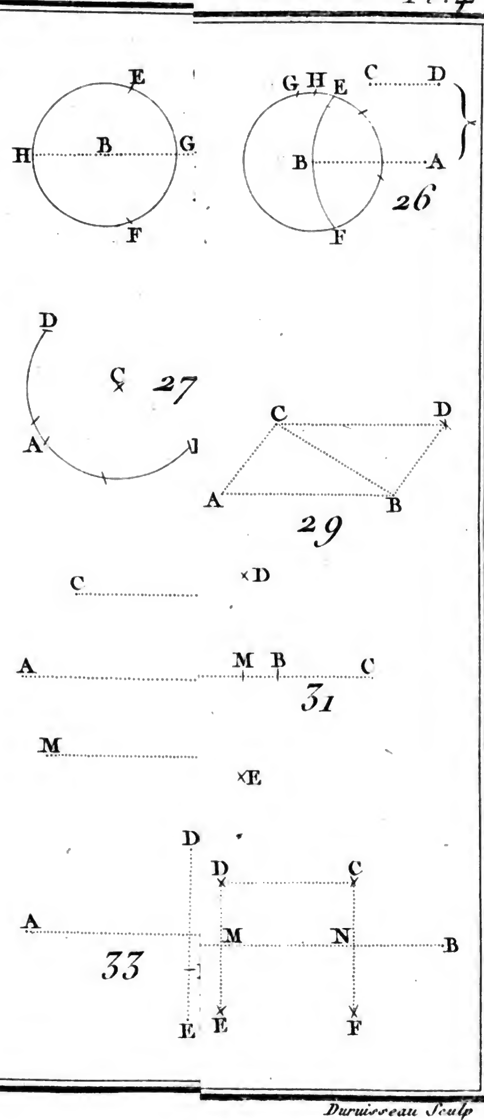
K Z B k z

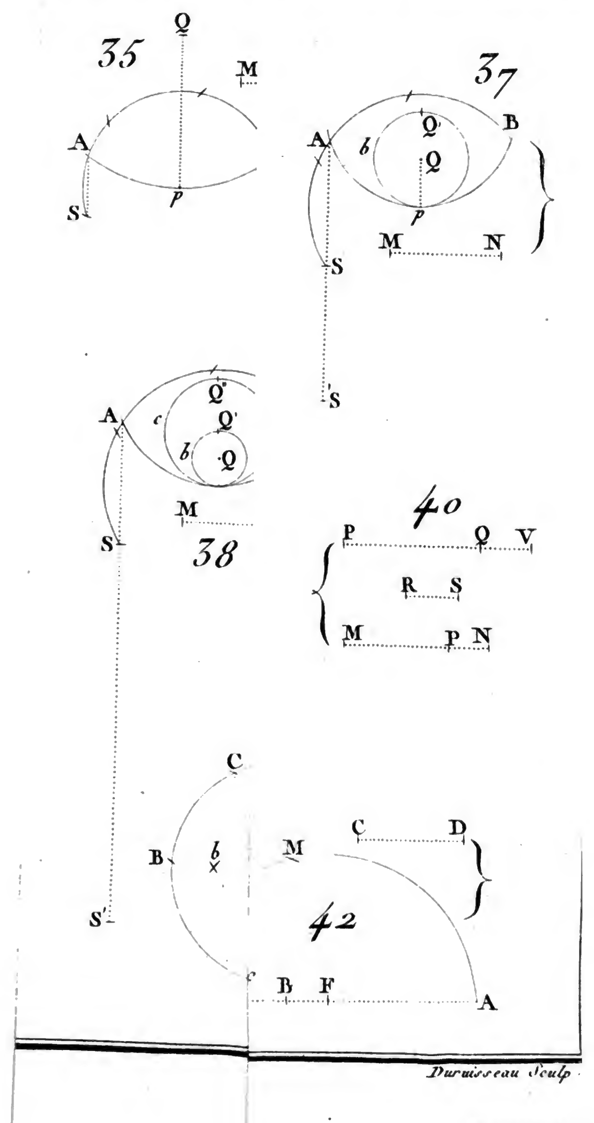
Duruisseau Sculp.

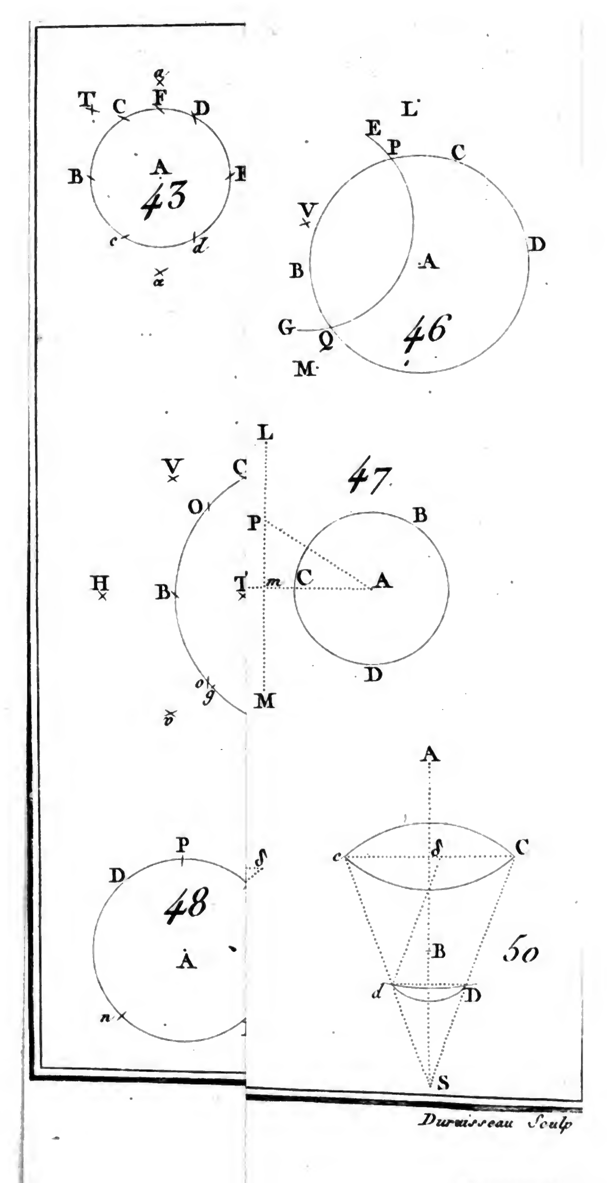


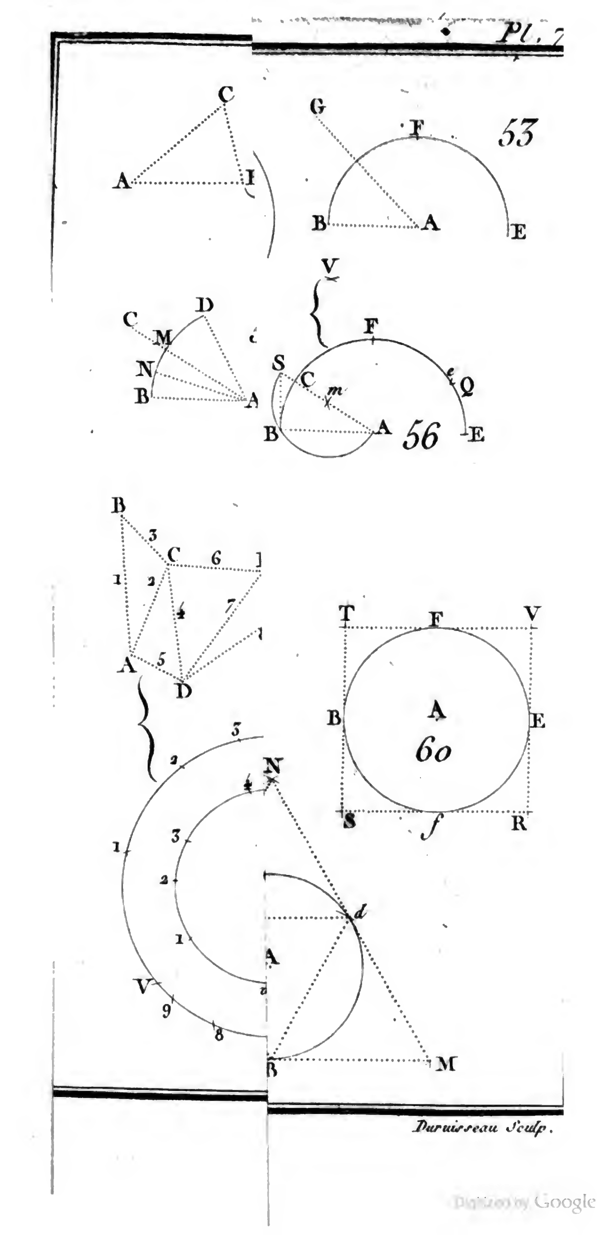
Duruisseau Sculp.

Pl. 4e

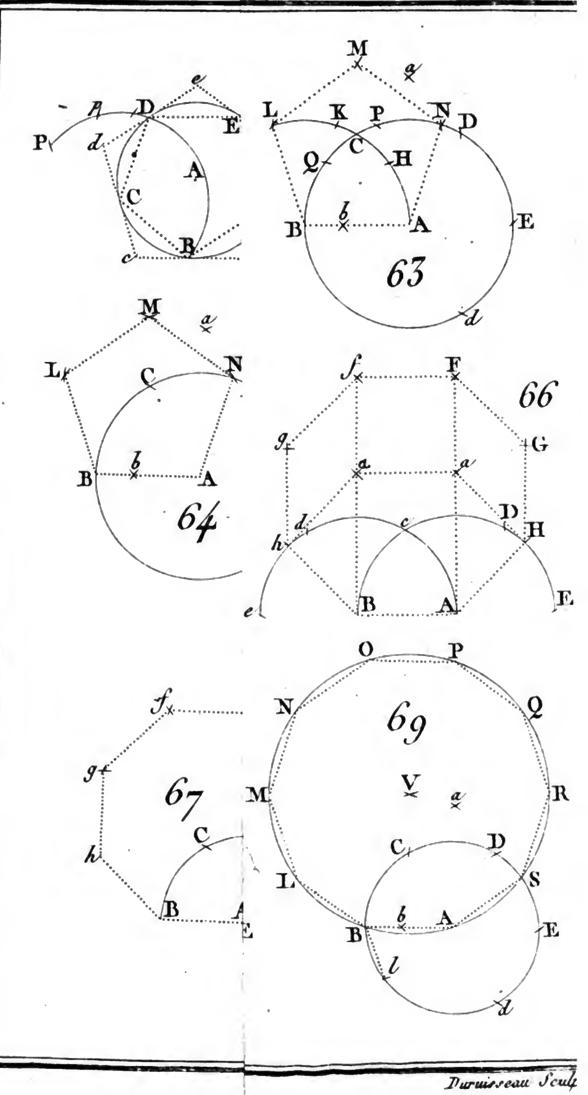

E
H
B
G
F
G H E
C
D
B
A
26
F
D
C
27
A
C
D
A
B
29
C
D
A
M
B
C
31
M
E
D
D
C
A
M
N
B
33
E
E
F
Duruisseau Sculp


35
Q
M
A
S
p
37
A
b
Q'
Q
B
p
M
N
S
S
A
c
Q"
Q'
b
Q
M
S
38
40
P
Q
V
R
S
M
p
N
C
B
b
M
C
D
S'
42
c
B
F
A
Duruisseau Sculp.

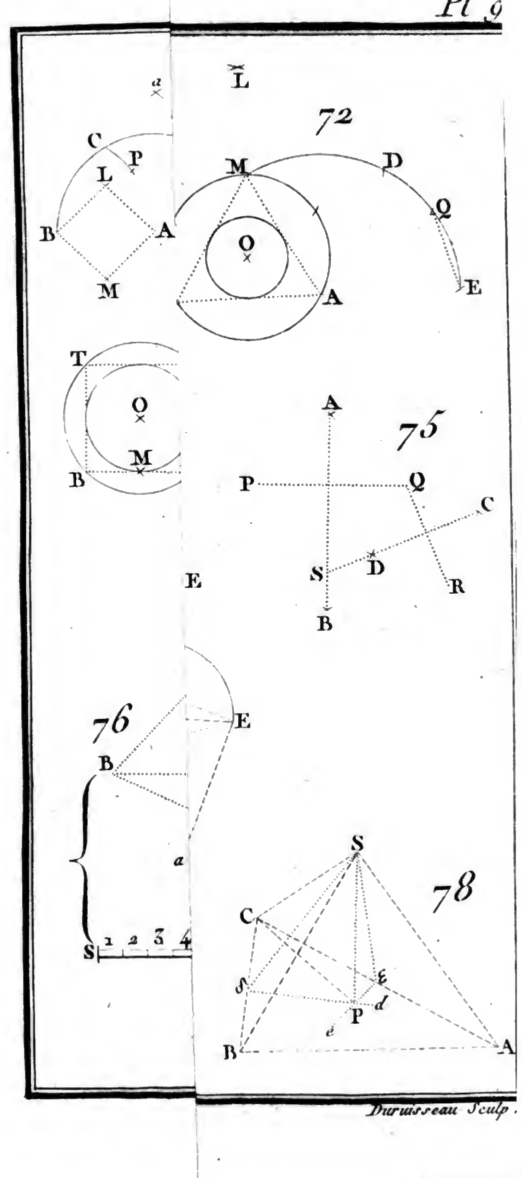

43
T C F D
B A E
c d
46
L E P C
V B A D
G Q M
47
L V C O P B
H B T m C A
o g D M
v
48
P D A n
50
A c C B d D S
Duruisseau Sculp



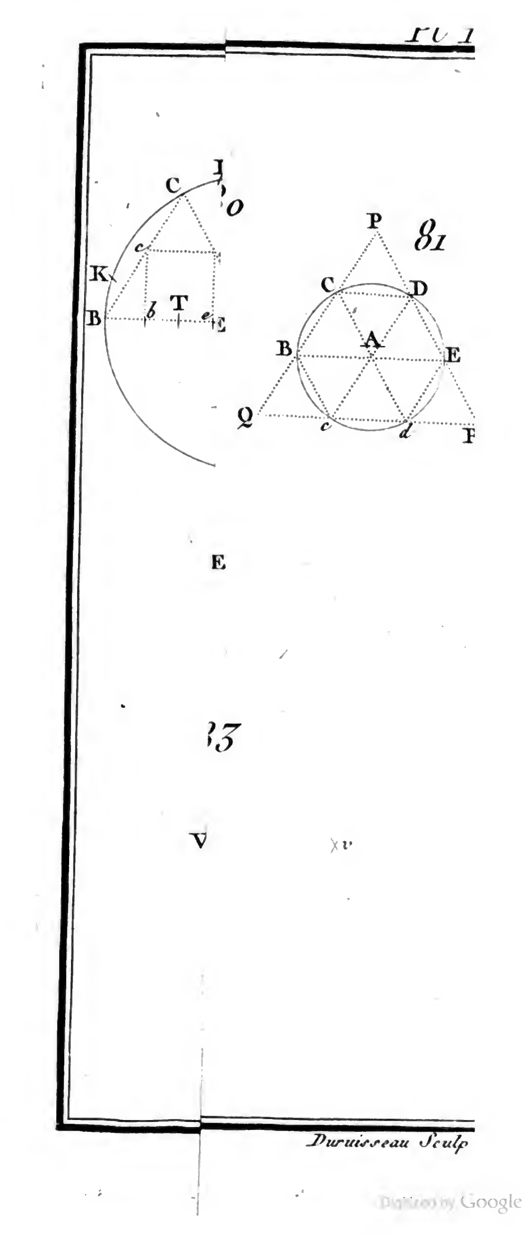
Duruisseau Sculp.



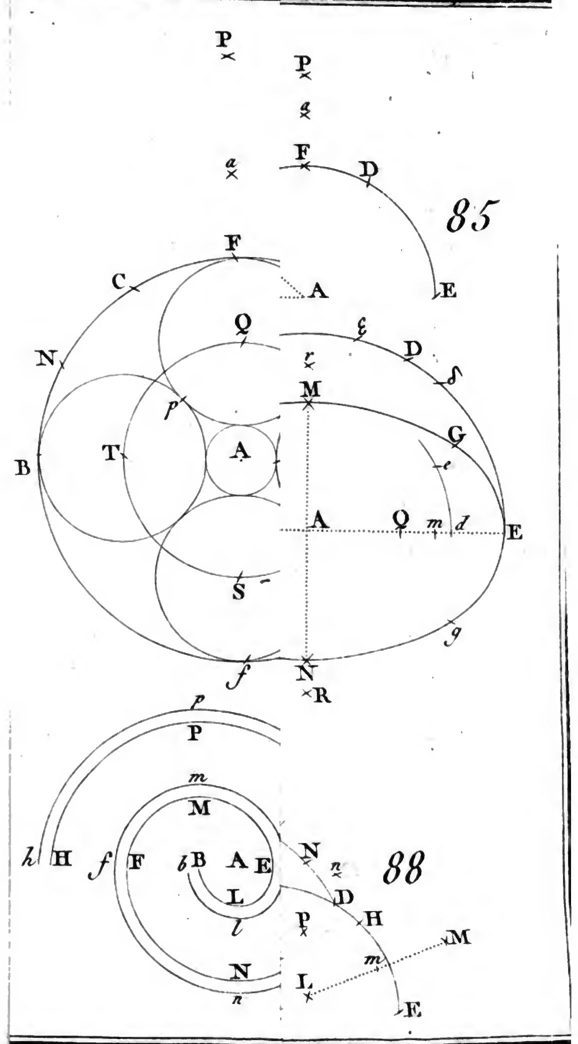
Duruisseau Sculp.



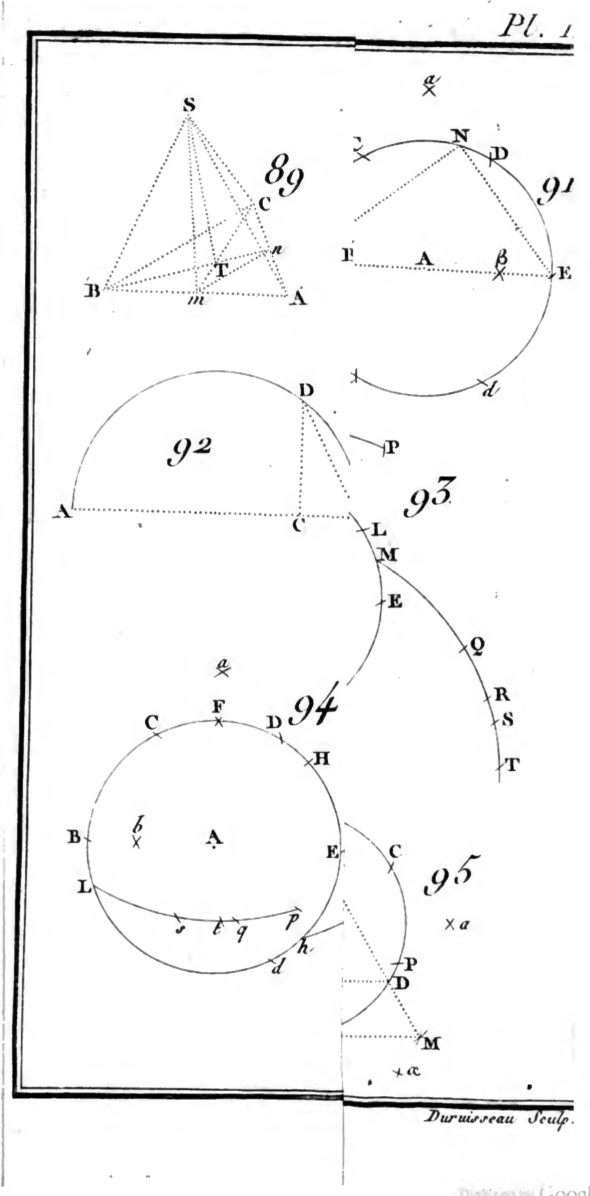
Duruisseau Sculp.



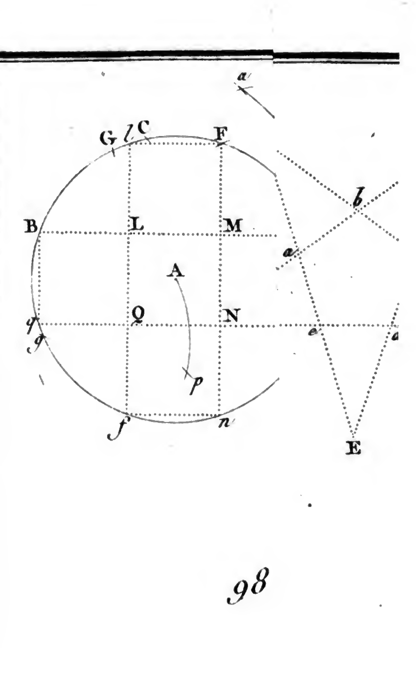
Pl. I
C
I
80
c
K
B
b
T
e
E
P
81
C
D
B
A
E
Q
c
d
F
E
83
V
Duruisseau Sculp

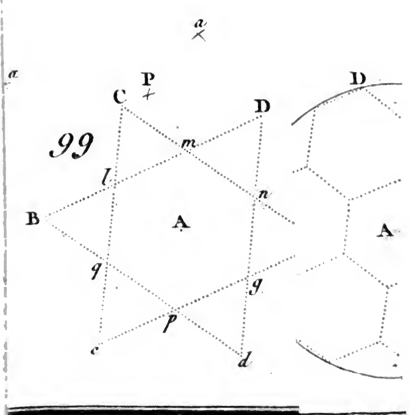


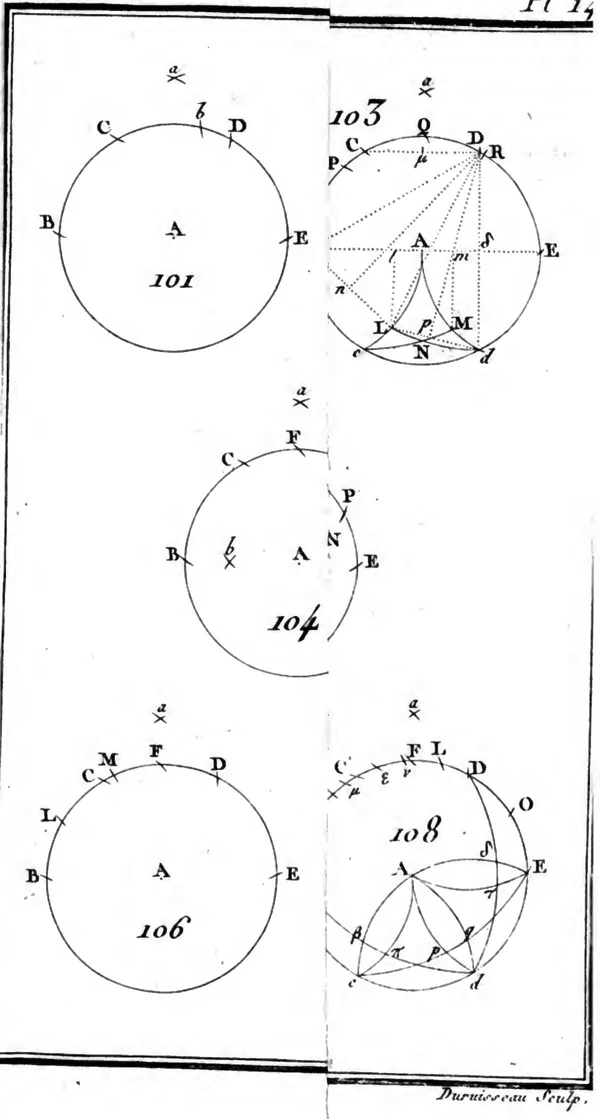
Duruisseau Sculp



Pl. 1
89
S
C
n
T
B
m
A
91
a
N
D
F
A
β
E
d
92
D
P
A
C
93
L
M
E
Q
R
S
T
a
94
C
F
D
H
B
b
A
E
L
s
t
q
p
h
d
95
C
a
P
D
M
α
Duruisseau Sculp.


a
G
l
C
F
B
L
M
b
a
A
Q
N
q
g
e
a
p
f
n
E
98


a
a
P
C
D
D
99
m
l
n
B
A
A
q
g
p
c
d



Duruisseau Sculp.

APITULATION des Ouvrages nouveaux qui ont u dans le cours de 1809, *chez* COURCIER, *Imprimeur-'raire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n°* 57.

NDRE. Essai sur la théorie des Nombres, 2e édit. in-4. 1809, 18 fr.

'C. Traité élémentaire de Géologie, in-8. 1809, 5 fr.

S. Essai de recherches élémentaires sur les premiers principes de la n, in-8. 1809, 4 fr.
ouvrage est d'un très-grand intérêt.

'. Tableau comparatif des résultats de la Cristallographie et de l'ana-chimique, relativement à la classification des minéraux, vol. in-8. , 5 fr. 50 c.
ouvrage est divisé en deux parties, dont la première présente le ta-e la Méthode minéralogique de l'auteur, perfectionnée d'après les dé-:s modernes, avec la synonymie des savans étrangers les plus célèbres. onde renferme le Recueil des analyses des minéraux, faites, depuis ain nombre d'années, par les plus habiles chimistes, avec des obser-sur ces mêmes analyses et sur différens points de philosophie mi-ique.

AR et GARNIER. Trisection de l'Angle, suivie de Recherches tiques sur le même sujet, in-8. 1809. 2 fr. 50 c.

IER. Réciproques de la Géométrie, in-8°, deuxième édition, avec : planches. 5 fr.

LET-DELISLE. Application de l'Algèbre à la Géométrie, in-8. 4 fr. 50 c.

EY. Chronologie d'Hérodote, conforme à son texte, in-8. 1809. 5 f.
,oi naturelle, ou Catéchisme du citoyen français, in-18. 1809. 1 f. 25 c.

)NI. Traité d'Acoustique, avec 8 pl. in-8. 1809. 7 fr. 50 c.
ne dirons rien pour le moment de cet Ouvrage qui est paru le 10 ›re 1809; les Journaux le feront suffisamment connaître. Sa Majesté ›n-le-Grand en a bien voulu agréer la Dédicace, après en avoir vu les ıces fondamentales.

)IX. Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, pplication de l'Algèbre à la Géométrie, 5e édition, in-8. 1809. 4 fr.
ıens d'Algèbre, par le même, à l'usage de l'Ecole centrale des e-Nations, 8e édition, revue et corrigée, in-8. 4 fr.

IN, RAY et BELLARD. Régulateur (le) universel des Poids et 'es, *invention nouvelle*, pour trouver, *seul et sans maître*, les rts réciproques du nouveau système décimal, et des Poids et Me-de tous les pays, etc., divisé en six chapitres, précédés chacun instruction particulière. 1 vol. in-8. de 500 pages. Prix 7 fr. avec ument de *carton*, et 9 fr. par la poste, 1809.

ıU. Découverte de l'unité et généralité de principe, d'idée et d'ex-ɔn de la science des nombres, son application positive et régulière à ›re, à la géométrie, et surtout à la pratique, aux développemens extension du précieux système décimal. Savoir doubler et addition-uffit à chacun pour en faire usage, même sons, tables, moyens ou

mécanismes auxiliaires quelconques; Calculs théori-pratiques, 1809, 1 vol. in-8. 3 fr.

Annuaire du Bureau des Longitudes, an 1810, 1 fr. franc de port.

GIROD-CHANTRANS. Essai sur la Géographie physique, le Climat et l'Histoire naturelle du département du Doubs, 2 vol. in-8°. 10 fr.

BEZOUT. Arithmétique, considérablement augmentée par Reynaud, et enrichie des Tables de logarithmes, portées jusqu'à 10,000, in-8. 1810, 3 fr.

— Géométrie, par le même, revue par Reynaud, augmentée de Notes divisées en trois parties; la première est destinée à completter la Géométrie de Bezout, enlevant les difficultés de la Géométrie; la seconde offre une collection de Problèmes et de Théorèmes; la troisième renferme la Théorie des plans, et les Elémens de la Géométrie descriptive, in-8. avec onze planches, 1809, (*) 5 fr.

OUVRAGES SOUS PRESSE.

(*) L'Algèbre de Bezout, avec les Notes de Reynaud.

LAGRANGE, Sénateur, etc. etc. Mécanique analytique, nouvelle édition, 2 vol. in-4.

— Traduction du Traité de Calcul différentiel d'Euler, en 2 vol. in-4.

LACROIX. Élémens de Géométrie, 8e édition.

LACAILLE et MARIE. Cours élémentaire de Mathématiques pures, avec des notes par M. *Labbé* (*), professeur de Mathématiques et examinateur des candidats pour l'École Impériale Polytechnique, in-8.

(*) STATIQUE élémentaire, par le même, avec Planches.

GIRARD, ingénieur. Recherches expérimentales sur l'eau et le vent, considérés comme forces motrices applicables aux Moulins et autres Machines à mouvement circulaire, in 4, avec planches.

